سلسلة المعلومات العامة

الرياضيات

جروس برس



سلسلة المعلومات العامة

الرياضيات

إعداد
موريس شربل

جروس برس

الطبعة الأولى

١٩٩٤ م - ١٤١٥ هـ



جروس برس

طرابلس - لبنان

فاكس: ٧٨٢٧٩٠ ٢١٢٤ ٠٠١

مقدمة

في عالم أصبح فيه الاتصال بالكواكب ممكناً، وفي حضارة مُمكننة في كل مجالاتها العلمية والصناعية والزراعية والتكنولوجية، لم تعد عملية إتقان الأعمال الحسابية مقتصرة على الإختصاصيين والتقنيين فحسب، بل أصبحت واقعاً ملموساً يفترض على كلّ إنسان حضاري أن يتقنها.

بشكل آخر، لم نقمْ هنا بوضع كتاب رياضيات عادي ليحل مكان كتاب حساب أو كتاب جبر أو كتاب هندسة . . . بل كتاب في متناول الجميع وللجميع. مما لا شك فيه أن متناوِله عليه أن يكون ملمّاً، ولو قليلاً، بالعلوم الرياضية.

كما وأن كتابنا هذا قد تناول مفاهيم الرياضيات الحديثة بمعالجة نظرية المجموعات، ولو بإيجاز، كي يستطيع الاطلاع عليها من فاته أن تعلّمها أيام مروره في المدرسة.

لهذا الكتاب هدفان:

الأول: إعادة تذكير أو بالأحرى إعداد الذين تلقوا تعليماً تقليدياً مع الاطلاع على كل الصيغ القديمة والحديثة.

الثاني: إعداد تأسيسي بالنسبة للأجيال الجديدة، بعيداً عن هموم حفظ الدروس ومعالجة المسابقات، مع الحفاظ حتماً على كل الحقائق والنظريات المطلوبة.

هذا الكتاب يحتاجه كل من يتعاطى في الأمور العلمية من قريب أو من بعيد، إضافة إلى كل نشاط يمكن أن يمارسه أي إنسان في أي وقت وفي أي مكان، فهو بحاجة إلى مثل هذا الكتاب بين يديه، أنه رفيق الإنسان المعاصر ومساعده في حل مشكلاته.

نأمل أن نكون قد حققنا بعضاً من الأهداف الحضارية، وقدمناها إلى قارئنا العربي كي يستفيد منها.

والله ولي التوفيق

موريس شربل

الفصل الأول

الجبر الحديث: نظرية المجموعات

المجموعة م تحتوي على العناصر و، أ، ى وهي أحرف العلة في اللغة العربية.
نقول: و تنتمي إلى م أو و ∋ م

- في جملة رياضية صحيحة أمام الجهة المقعرة للرمز «∋» نضع مجموعة وأمام المحدبة له نضع عنصراً من هذه المجموعة على الشكل التالي:

عنصر من المجموعة	∋	المجموعة

بينما نقول د لا تنتمي إلى م أو د ∌ م

- تكتب المجموعة طياً عندما تذكر صفات العناصر المنتمية إلى مجموعة ما. مثلاً مجموعة أيام الأسبوع.
- تكتب المجموعة نشراً عندما نبسط عناصر هذه المجموعة بين ضمامتين ويوضع فاصلة بين عنصر وآخر. مثلاً:

{الإثنين، الثلاثاء، الأربعاء، الخميس، الجمعة، السبت، الأحد}

- في جملة رياضية صحيحة إذا كان ما قبل الرمز «=» مجموعة فما بعده يجب أن يكون مجموعة؛ وإذا كان ما بعد الرمز «=» مجموعة فما قبله يجب أن يكون مجموعة.
- إذا كانت أ وَ ب مجموعتين، لكي تكتب أ = ب يجب أن تثبت أنهما متألّفتان من العناصر نفسها وذلك ممكن بإسلوبين:

الأول: نبرهن أن كل عنصر ينتمي إلى أ ينتمي أيضاً إلى ب، وكل عنصر ينتمي إلى ب ينتمي أيضاً إلى أ.

الثاني: نبرهن أن كل عنصر خارج أ هو أيضاً خارج ب، وكل عنصر خارج ب هو أيضاً خارج أ.

- مجموعات لها أسماء خاصة:

١ ـ الزوج مثلاً: {قلم، دفتر} أو {+، -}

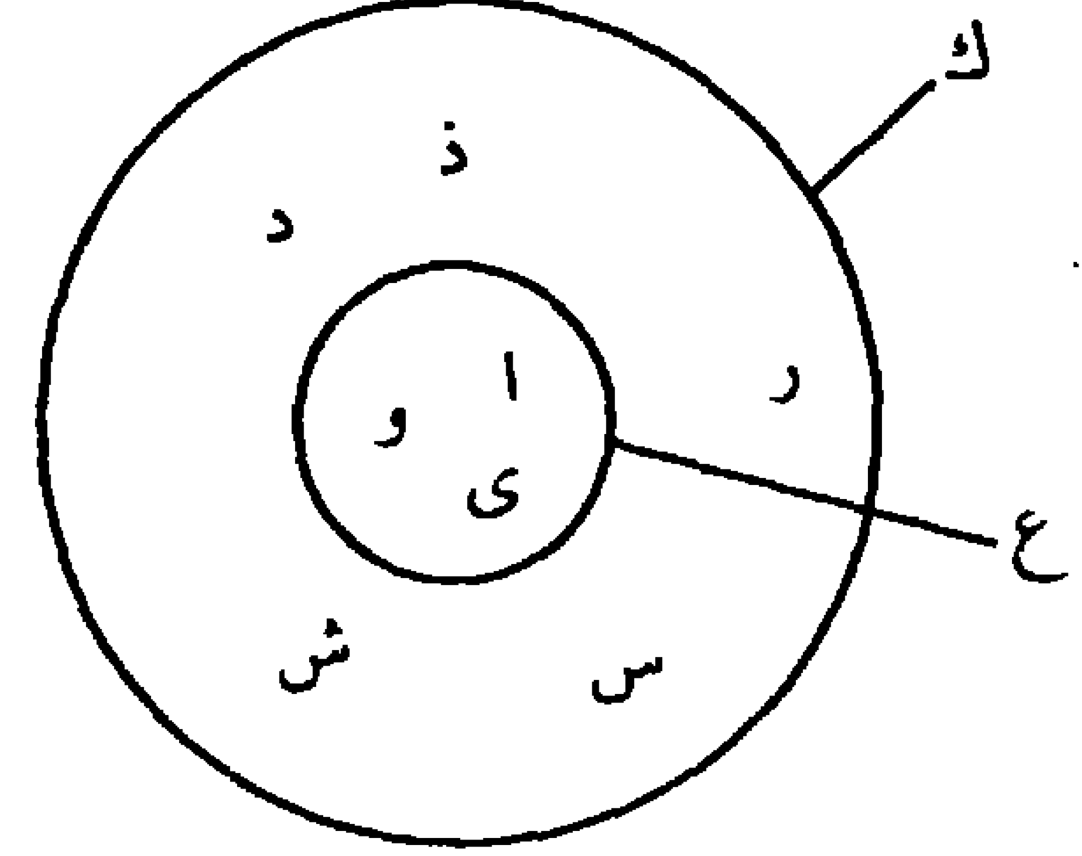
الزوج هو المجموعة التي تحتوي على عنصرين

٢ ـ الفرد مثلاً: {معلّم}، {شمس}..

الفرد هو المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد.

٣ ـ المجموعة الخالية: مثلاً: { } أو ф، مجموعة المدن على القمر.

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر، أو عدد عناصرها صفراً. ولذا لا يجوز الخلط بين الصفر والمجموعة الخالية.



- يقال عن مجموعة ۴ أنها جزء من مجموعة ب (أو مجموعة جزئية من ب) عندما يكون كل عنصر من ۴ هو عنصر من ب. ويرادفه أيضاً إن كل ما هو خارج ب هو أيضاً خارج ۴.

- اللاحتواء: إذا وجد عنصر على الأقل منتم إلى المجموعة ۴ وغير منتم إلى المجموعة ب، فالمجموعة ۴ تكون غير محتواة في ب وتكتب ۴ $\not\supset$ ب

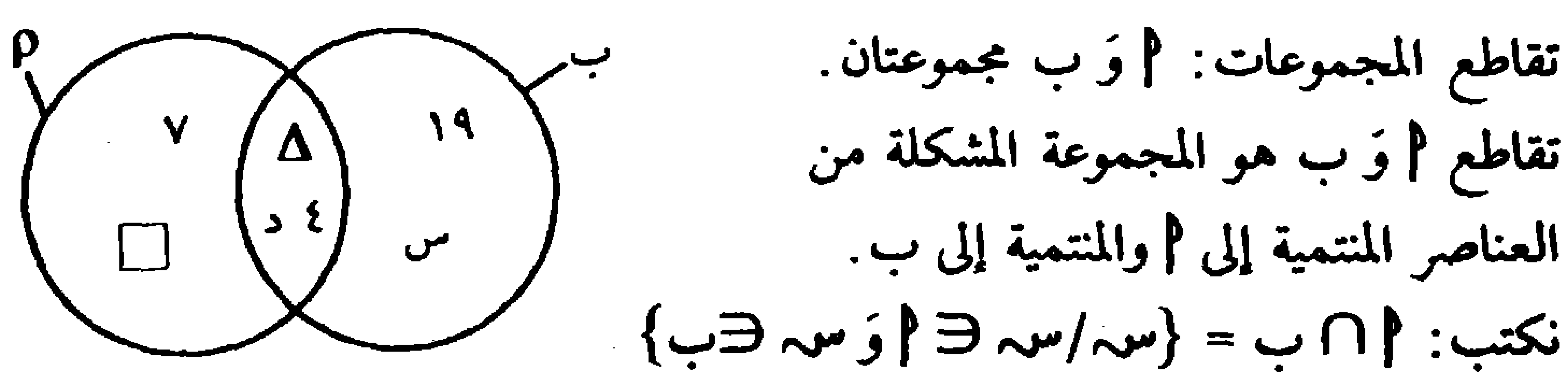
- الجزء الخالي من مجموعة يساوي المجموعة الخالية.

- مهما كانت المجموعة ب فإن ф $\supset$ ب.

- المتمم: الحاضرون في صف من الصفوف المدرسية هم جزء من هذا الصف؛ ومتممه هم الغائبون. وإذا حضر التلاميذ كلهم فالغائبون يشكلون مجموعة خالية.

- مجموعة أجزاء المجموعة: نحصل عليها بالاستعانة بالجدول الثنائي أو بواسطة الشجرة وتدعى جـ (۴)

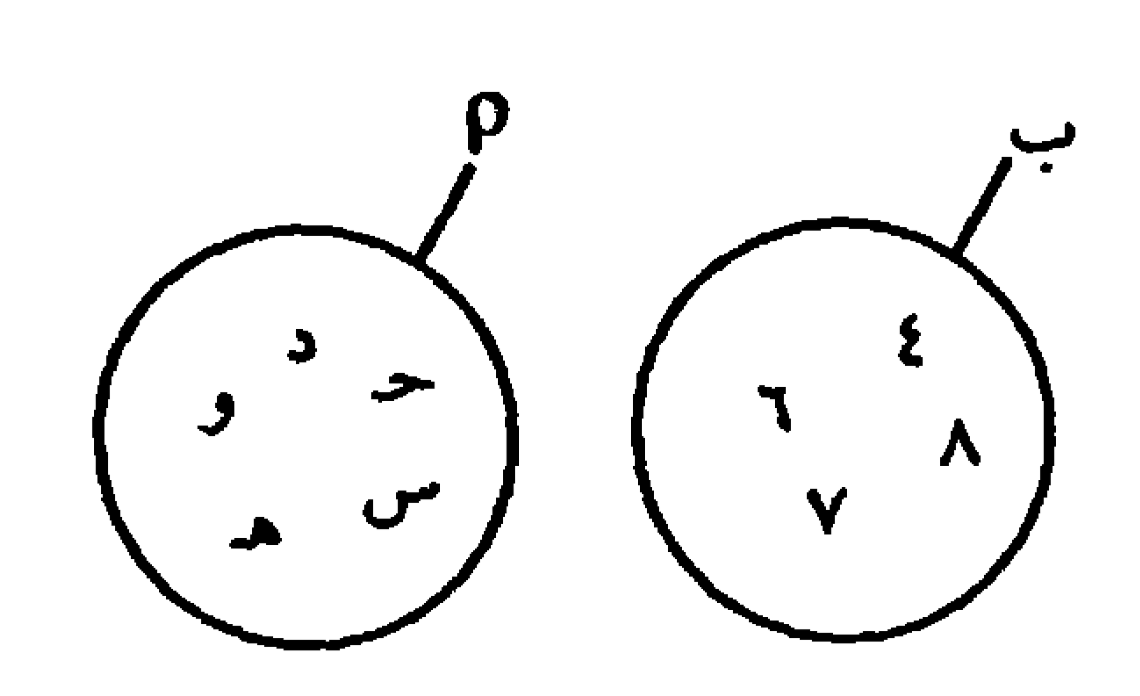
- جـ (۴) هي المجموعة التي عناصرها أجزاء المجموعة ۴ وتسمى مجموعة أجزاء ۴ ومحددة رياضياً هكذا (سـ $\ni$ ۴) مرادفة لـ {س} $\ni$ جـ (۴).



- تقاطع المجموعات: ۴ وَ ب مجموعتان.

تقاطع ۴ وَ ب هو المجموعة المشكلة من العناصر المنتمية إلى ۴ والمنتمية إلى ب.

نكتب: ۴ $\cap$ ب = {سـ/سـ $\ni$ ۴ وَ سـ $\ni$ب}



في الشكل المقابل أ ∩ ب = {Δ، ع، د}

- انفصال مجموعتين: نقول عن مجموعتين

إنهما منفصلتان عندما يكون تقاطعهما مجموعة خالية.

- مهما كانت المجموعتان أ وَ ب فإن أ ∩ ب = ب ∩ أ ونقول إن التقاطع عملية تبديلية.
- مهما كانت المجموعة أ فإن أ ∩ أ = أ (المماثلة)
- مهما كانت المجموعات أ، ب وَ ج فإن:

(أ ∩ ب) ∩ ج = أ ∩ (ب ∩ ج)

ونقول إن التقاطع هو عملية تجميعية.

- إن تقاطع مجموعات: هو المجموعة المشكلة من العناصر المنتمية إلى كل المجموعات في الوقت نفسه.

أ ∩ ب ∩ . . . ∩ ك = {سـ/سـ ∈ أ وَ سـ ∈ ب و. . . سـ ∈ ك}

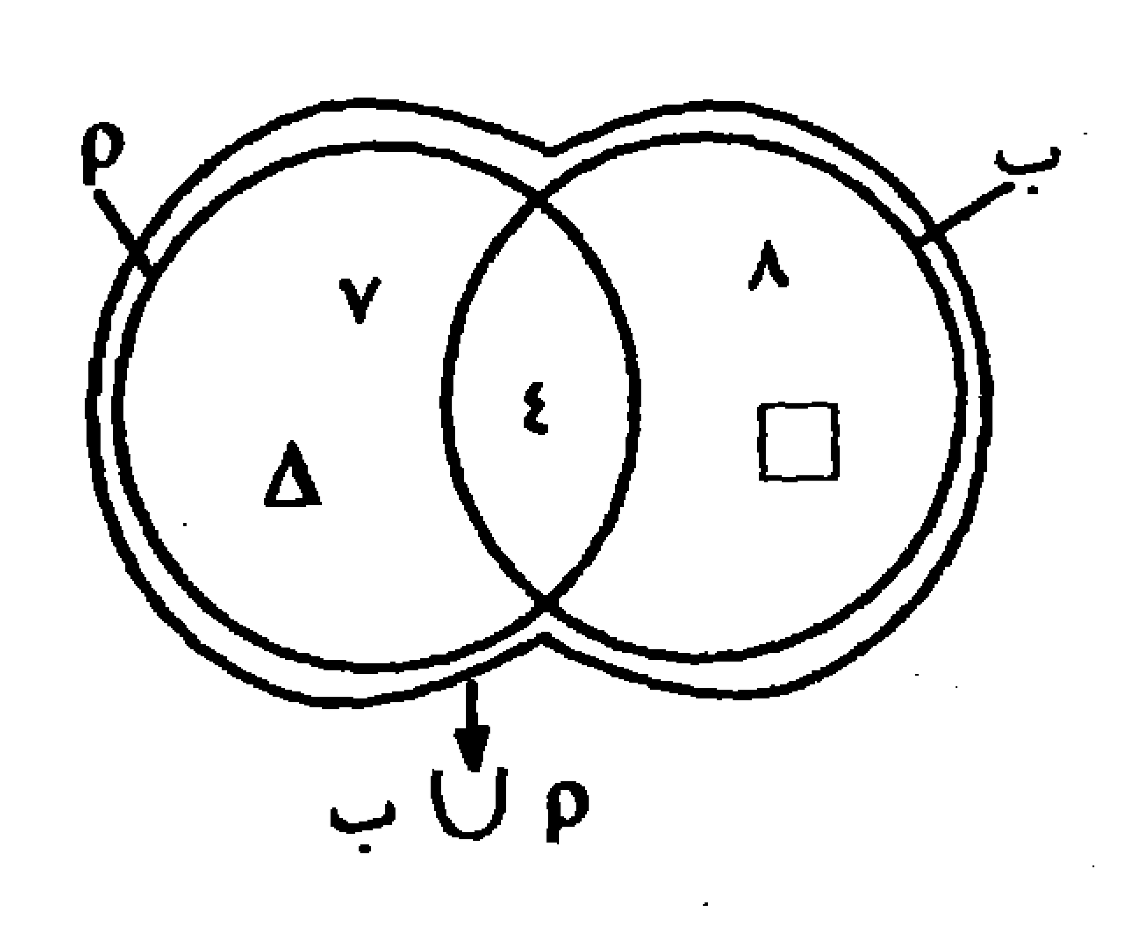
- تقاطع المجموعات: هو مجموعة جزئية من كل المجموعات المعنية:

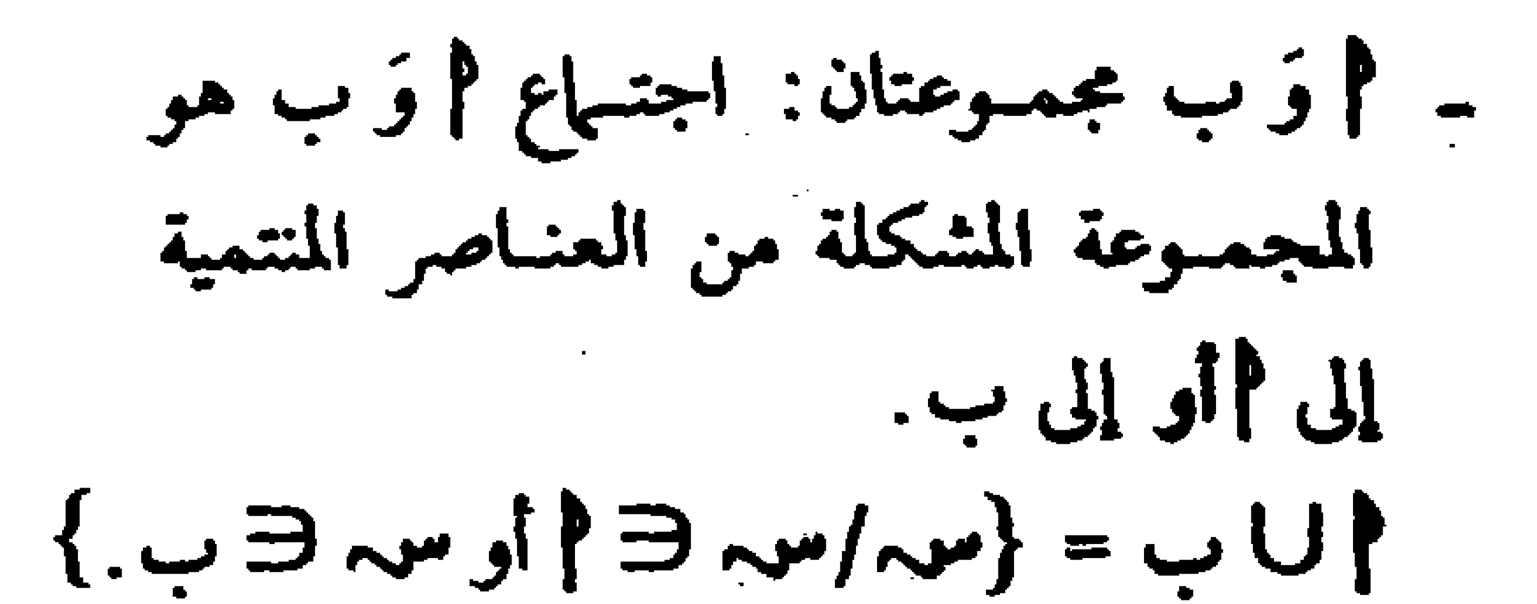
أ ∩ ب ∩ ج ⊂ أ وَ أ ∩ ب ∩ ج ⊂ ب وَ أ ∩ ب ∩ ج ⊂ ج . . .

- إذا كانت ب ⊂ أ فإن ب ∩ أ = ب
- إذا كانت ب ∩ أ = ب فإن ب ⊂ أ
- لنفترض ب ∈ أ فإن:

ب ∩ $\left]^{ب}_{أ}\right.$ = Φ

اجتماع المجموعات:





- أ وَ ب مجموعتان: اجتماع أ وَ ب هو المجموعة المشكلة من العناصر المنتمية إلى أ أو إلى ب.

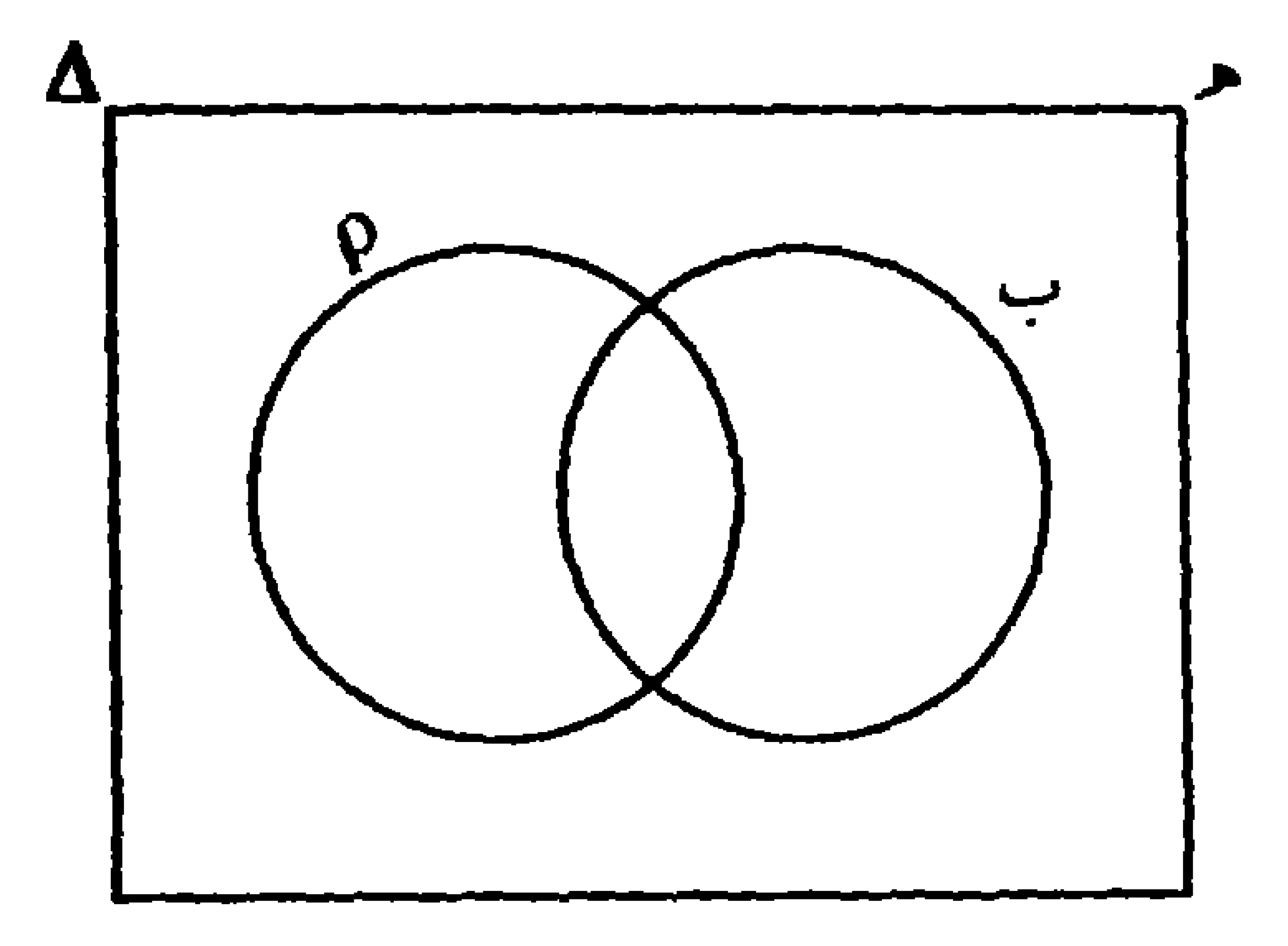
أ ∪ ب = {سـ/سـ ∈ أ أو سـ ∈ ب.}

خصائص الاجتماع :

- مهما كانت المجموعتان أ وَ ب فإن :
  أ ⊂ أ ∪ ب وب ⊃ أ ∪ ب .
- مهما كانت المجموعتان أ وَ ب فإن أ ∪ ب = ب ∪ أ
  ويقال الاجتماع عملية تبديلية .
- مهما كانت المجموعة أ فإن أ ∪ أ = أ (المماثلة)
- مهما كانت المجموعات أ وَ ب وَ ج فإن :
  أ ∪ (ب ∪ ج) = (أ ∪ ب) ∪ ج
  ويقال : الاجتماع عملية تبديلية .
- إن اجتماع مجموعات هو المجموعة المشكلة من العناصر المنتمية على الأقل إلى إحدى هذه المجموعات
  أ ∪ ب ∪ . . . ∪ ك = {س/س ∈ أ أوس ∈ ب أو س ∈ ك}
  أو : جامعة هنا
- اجتماع مجموعات هو : مجموعة حيث أن كلا من المجموعات المؤلفة هي جزء من الاجتماع .
- إذا كانت ب ⊂ أ فإن ب ∪ أ = أ
- إذا كانت ب ∪ أ = أ فإن ب ⊃ أ
- مهما كانت المجموعة أ فإن φ ∪ أ = أ ∪ φ = أ
- لنفترض ب ⊂ أ فإن ب ∪]ب/أ = أ

خصائص التقاطع والاجتماع

- أ ∩ ب ⊂ أ ∪ ب
- أ ∩ (ب ∪ ج) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ ج)
  كما أنه بالتبديل : (ب ∪ ج) ∩ أ = (ب ∩ أ) ∪ (ج ∩ أ)
- أ ∪ (ب ∩ ج) = (أ ∪ ب) ∩ (أ ∪ ج)
  وكذلك (ب ∩ ج) ∪ أ = (ب ∪ أ) ∩ (ج ∪ أ)



- نظرية مورغان الأولى

$$\complement_{\text{هـ}}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \complement_{\text{هـ}}\text{أ} \cap \complement_{\text{هـ}}\text{ب}$$

- نظرية مورنمان الثانية

$$\complement_{\text{هـ}}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \complement_{\text{هـ}}\text{أ} \cup \complement_{\text{هـ}}\text{ب}$$

- أ وَ ب مجموعتان: الفرق غير التناظري بين أ وَ ب هو مجموعة العناصر المنتمية إلى أ وغير المنتمية إلى ب

رمزياً: $\text{أ} - \text{ب} = \{\text{س} / \text{س} \in \text{أ} \text{ وَ } \text{س} \notin \text{ب}\}$

- $\text{أ} \subset \text{ب}$ يرادفه $(\text{أ} - \text{ب} = \phi)$
- إذا كانت أ وَ ب مجموعتين منفصلتين فإن $\text{أ} - \text{ب} = \text{أ}$ والعكس صحيح أيضاً.
- الفرق التناظري بين مجموعتين أ وَ ب هو مجموعة العناصر المنتمية إلى أ أو إلى ب.

$$\text{أ} \,\Delta\, \text{ب} = \complement_{\text{أ} \cup \text{ب}}(\text{أ} \cap \text{ب})$$

الفرق التناظري بين مجموعتين هو متمم تقاطعهما في اجتماعهما

$\text{ب} \,\Delta\, \text{ب} = \phi$

$(\text{أ} \,\Delta\, \text{ب} = \phi)$ يرادفه $(\text{أ} = \text{ب})$

$\text{أ} \,\Delta\, \phi = \phi \,\Delta\, \text{أ} = \text{أ}$

الخصائص:

الفرق التناظري بين جزء ومتممه هو المجموعة الكلية

- الثنائية تتكون من عنصرين مرتبين (٥، ٩)، (ب، ل)... الـ ب تدعى المسقط الأول واللام المسقط الثاني والاثنين هما مسقطا الثنائية أو حداها أو طرفاها.
- إذا كان معنا كائنان رياضيان أ وَ ب فمن الممكن تحديد كائن جديد يرمز إليه (أ،ب) ويسمى ثنائية حيث أ وَ ب هما مسقطاها ويعمل عليها بالقاعدة التالية:

(أ ، ب) = (س ، ش) يرادفه أ = س وَ ب = ش

- الجداء الديكارتي Produit cartésien :

الجداء الديكارتي لمجموعتين أ وَ ب هو مجموعة الثنائيات التي مسقطها الأول في أ ومسقطها الثاني في ب

أ × ب = {(س ، ش)/س ∈ أ وَ ش ∈ ب}

ك × ل × م = {(س ، ش ، ص)/س ∈ ك وَ ش ∈ ل وَ ص ∈ م}

- قطر الجداء الديكارتي هو مجموعة الثنائيات المتساوية المسقطين.

ورمزياً ق ⊂ أ × أ: ق = {(س ، س)/س ∈ أ}

وتقرأ مربع أ حيث أن أ^2 = أ × أ

- خصائص الجداء الديكارتي:

أ ⊂ ك وَ ب ⊂ ل) يرادفه (أ × ب ⊂ ك × ل)

(ك × ل = ϕ) يرادفه (ك = ϕ أو ل = ϕ

ك × ل = ك × م يرادفه (ل = م)

- العلاقة الثنائية

تعريف: العلاقة الثنائية هي ثلاثية مسقطها الأول مجموعة م وتسمى المنطلق، ومسقطها الثاني مجموعة ق وتسمى المستقر ومسقطها الثالث ب مجموعة جزئية من م × ق وتسمى بيان العلاقة: وإذا كان «ع» هو رمز العلاقة الثنائية فنكتب رمزياً: ع = (م ، ق ، ب).

ونقول إن ع هي علاقة ثنائية من م إلى ق بيانها ب

- نقول عن علاقتين إنهما متساويتان عندما يتساوى منطلقاهما معاً ومستقراهما معاً وبياناهما معاً

- نمثل العلاقات بطرق ثلاثة: - التمثيل السهمي

- التمثيل الشبكي

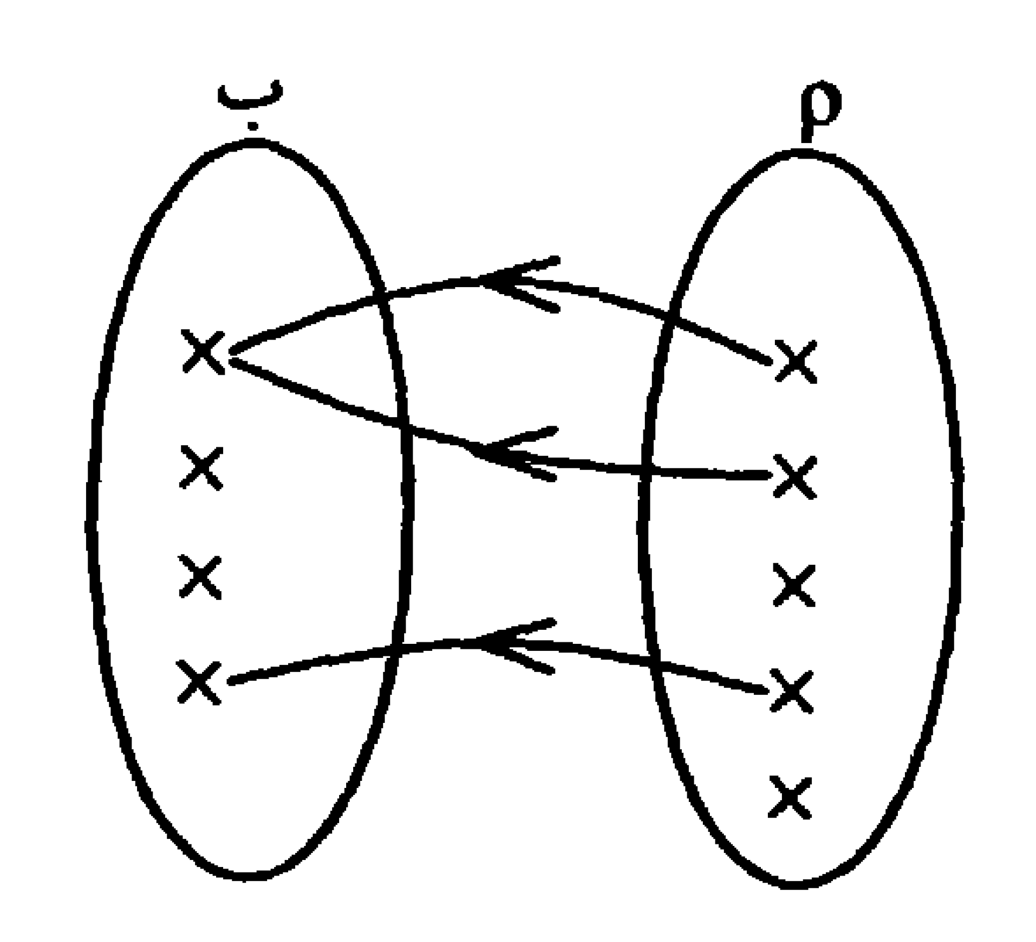
- التمثيل الديكارتي

- العلاقة المتممة: إذا كانت ع = (م ، ق ، ب) حيث ب ⊂ م × ب فإن العلاقة المتممة لـ ع هي غ المحددة هكذا: غ = (م ، ق ، بَ) حيث بَ = $\complement^{ب}_{م × ق}$

- العلاقة المعاكسة: لنفترض ع = (م ، ق ، ب) حيث ب ⊂ م × ق العلاقة المعاكسة للعلاقة ع هي العلاقة ع$^{-1}$

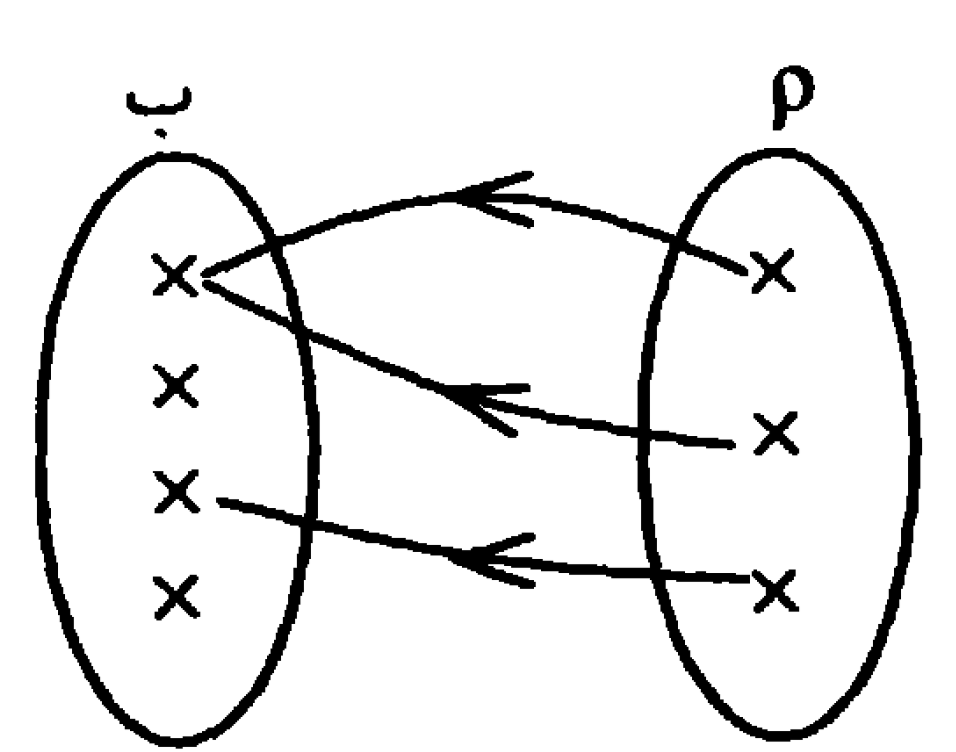
ع$^{-1}$ = (ق ، م ، ت) بحيث ت ⊂ ق × م وبحيث تكون ت = {(س ، ش)/(ش ، س) ∈ ب}.

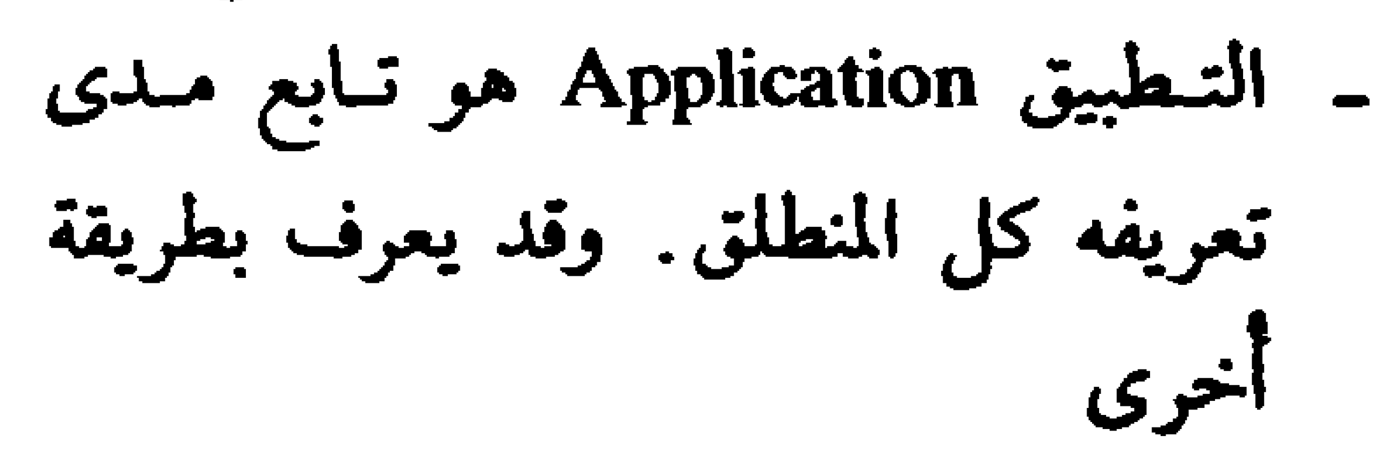
التابع أو الدالة Fonction



- تعريف: يقال عن علاقة من مجموعة إلى أخرى إنها دالة أو تابع إذا كان لكل عنصر من المنطلق صورة واحدة على الأكثر وفق هذه العلاقة

- مدى تعريف تابع: هو الجزء من المنطلق حيث التابع معرَّف عليه. أما متمم هذا الجزء فهو الجزء العقيم حيث التابع غير معرَّف

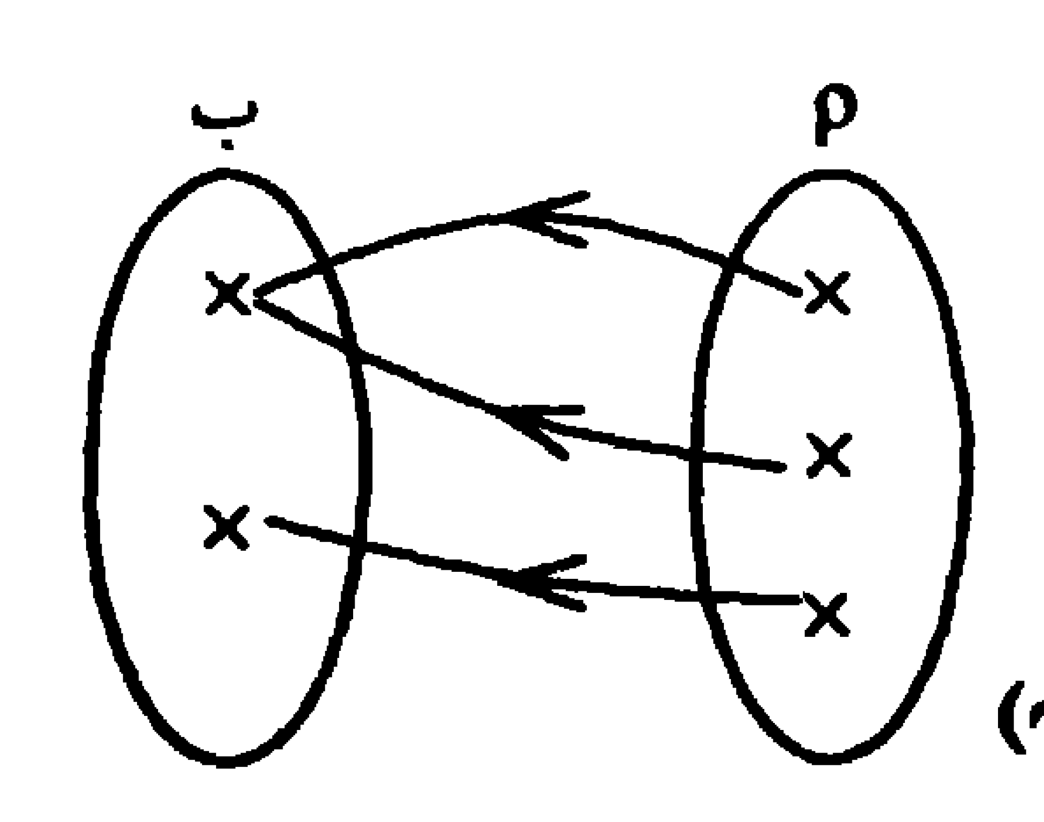




- التطبيق Application هو تابع مدى تعريفه كل المنطلق. وقد يعرف بطريقة أخرى

التطبيق هو علاقة ثنائية حيث لكل عنصر من المنطلق صورة واحدة فقط وفق هذه العلاقة

حالات خاصة من التطبيق



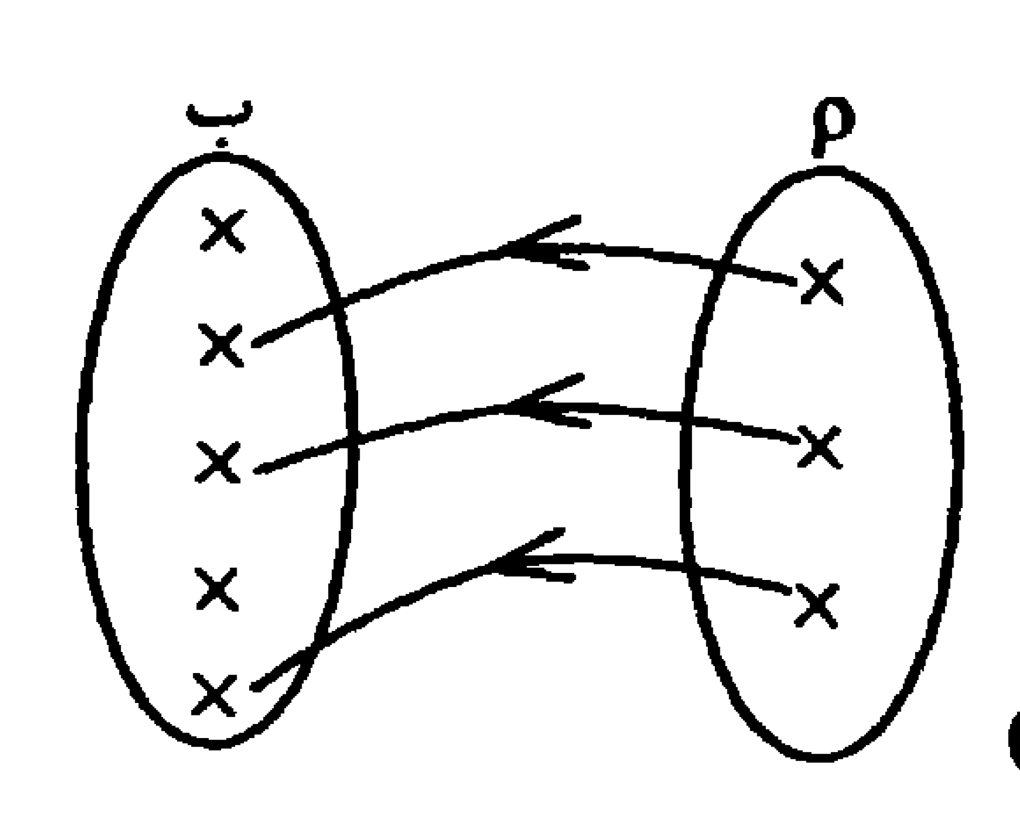
- يقال عن تطبيق إنه غامر، عندما يكون كل عنصر من المستقر صورة لعنصر من المنطلق

∀ ص ∈ ب E س ∈ م حيث أن ص = تا (س)

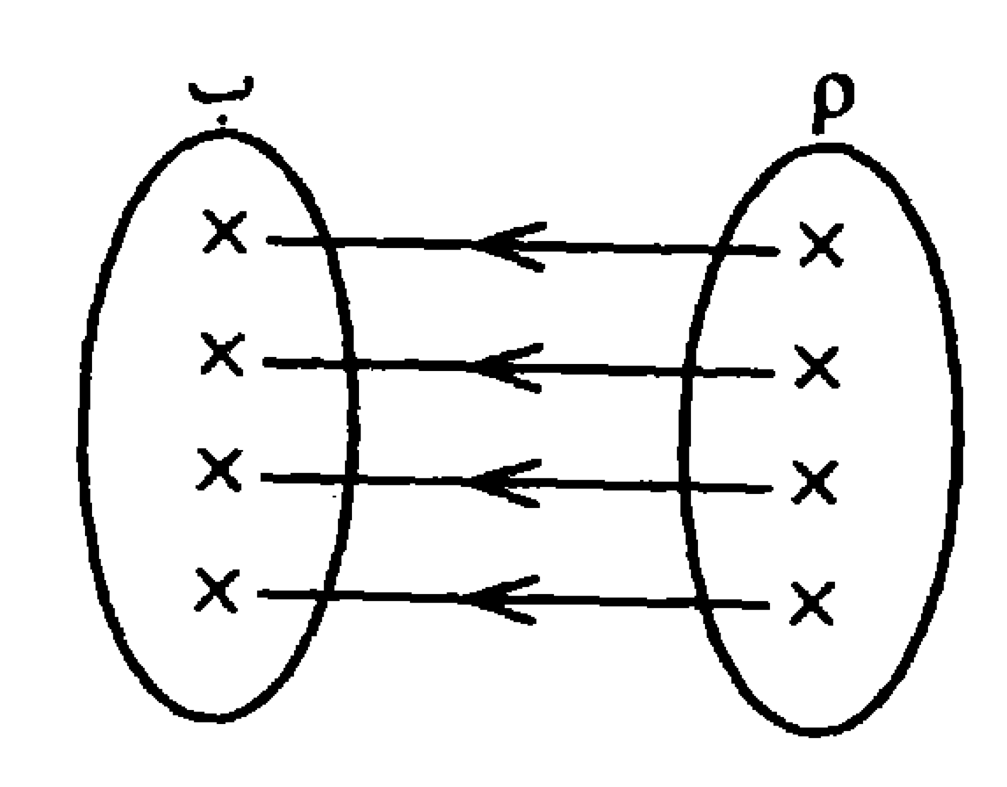
- يقال عن تطبيق إنه تباين عندما يكون لعنصرين متباينين من المنطلق صورتان متباينتان من المستقر

س~1~، س~2~ ∋ ﻫ

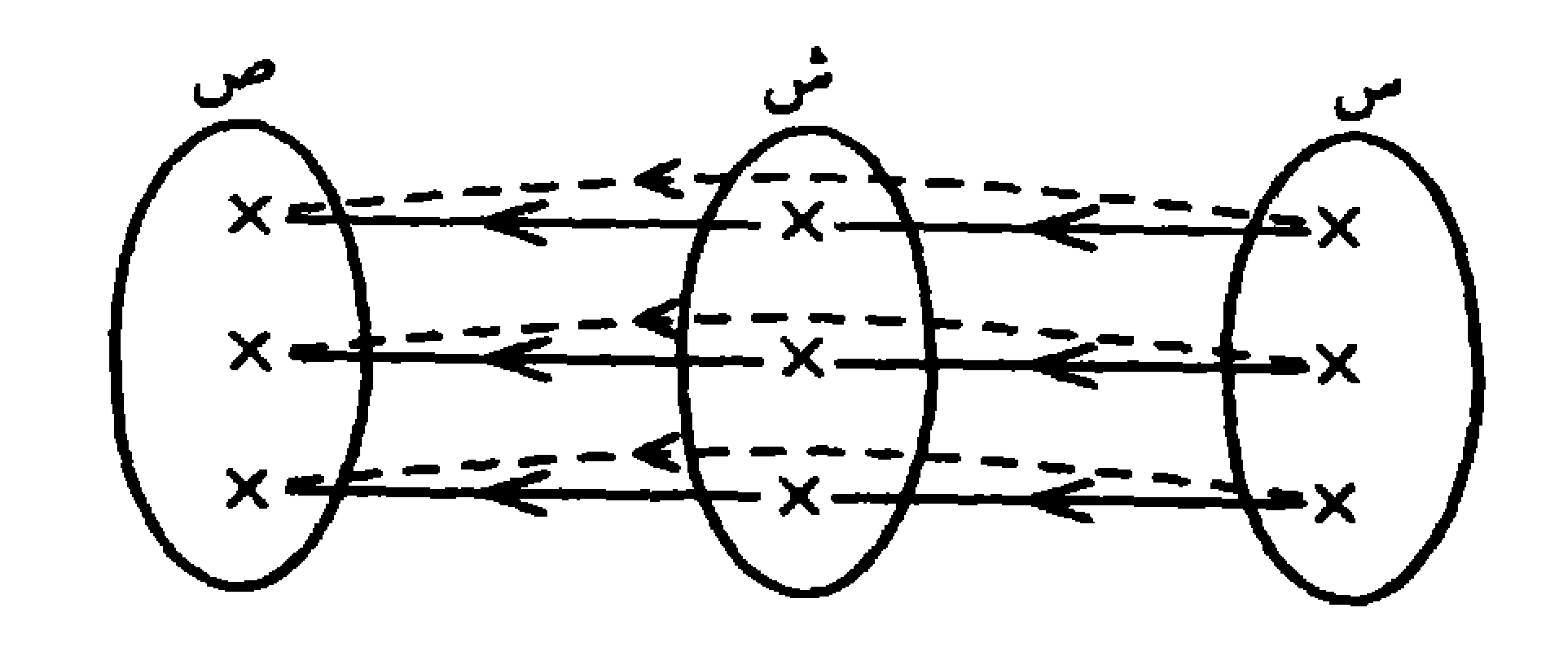
إذا كان س~1~ ≠ س~2~ ⇐ تا (س~1~) ≠ تا (س~2~)



- يقال عن تطبيق إنه تقابل عندما يكون كل عنصر من المستقر صورة لعنصر من المنطلق ولهذا العنصر فقط



- استنتاج: يقال عن تطبيق إنه تقابل عندما يكون غامراً وتبايناً.
- تأليف التطبيقات: إذا كان ط تقابلاً من س على ص فإن التقابل المعاكس يرمز إليه بـ ط^-1^: ط^-1^: ص ← س ومهما كان ب ∋ ص فإنه يوجد عنصر ﻫ، مثلاً، من س بحيث أن ط (ﻫ) = ب وعليه فإن ط^-1^ (ب) = ﻫ.
- إذا كانت ط تقابلاً من س على ش وظ تقابلاً من ش على ص فإن بإمكاننا تحديد تقابل من س إلى ص

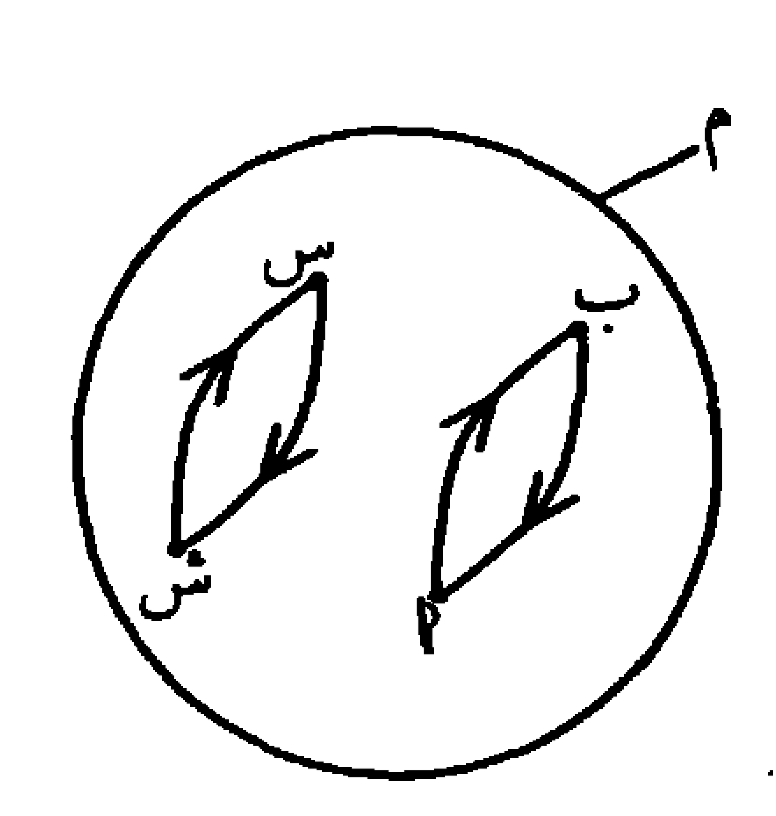


العلاقة في مجموعة.

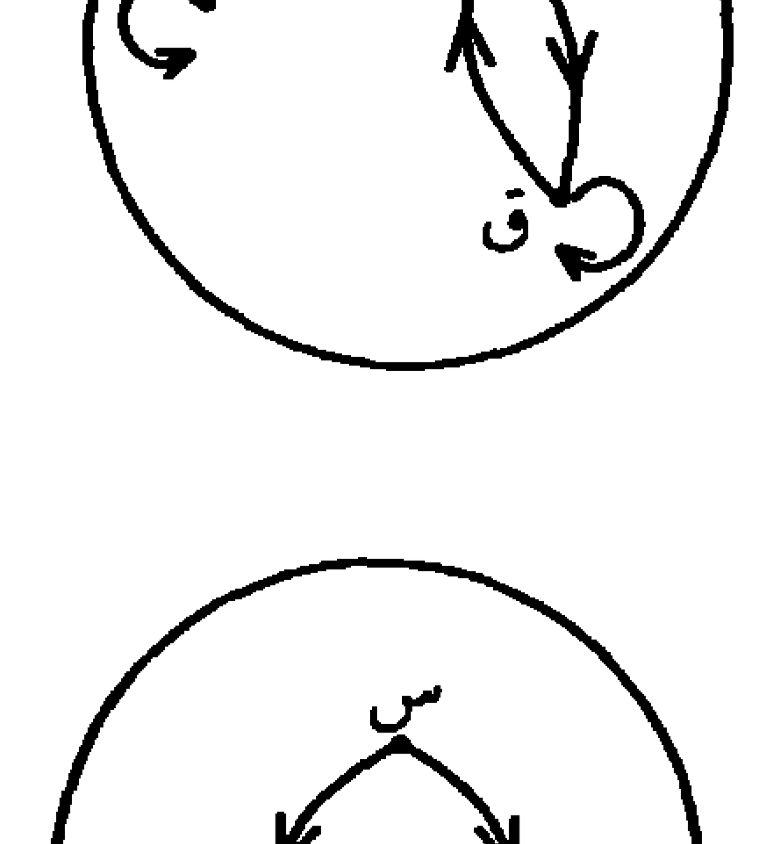
- تعريف: يقال أن العلاقة ع هي علاقة ثنائية في مجموعة م عندما يكون منطلق ع ومستقرها المجموعة م، أما بيانها فهو طبعاً جزء من م × م.

وتكتب رمزياً: ع = (م ، م ، ب) بحيث ب ⊃ م × م

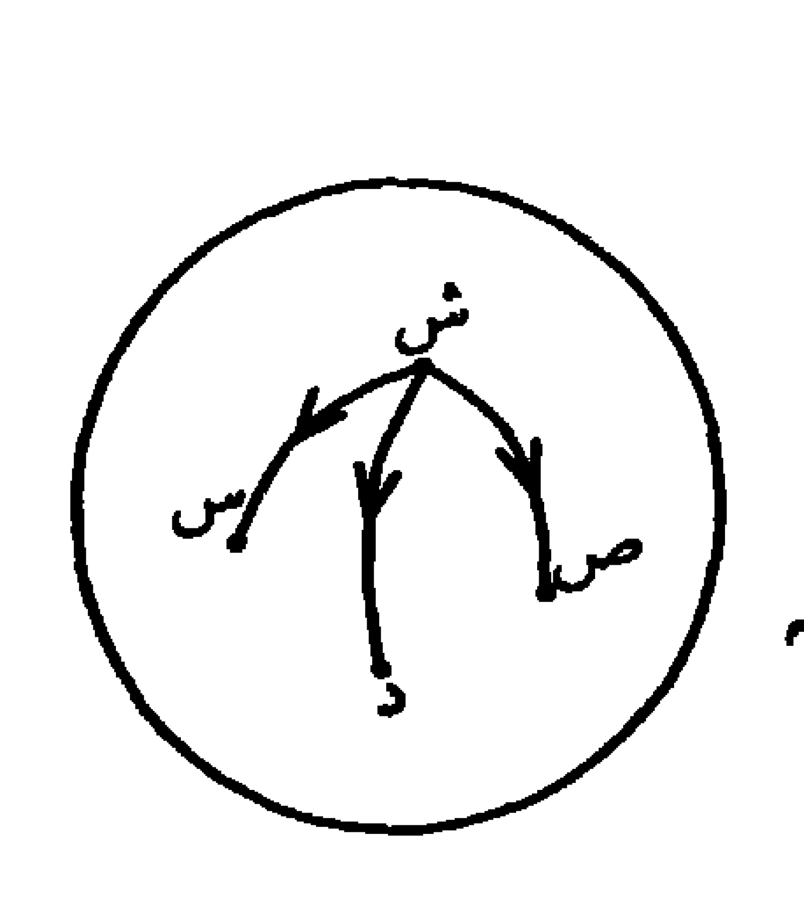
- خصائص العلاقة في مجموعة



١ - يقال عن العلاقة ع = (م ، م ، ب)
إنها تناظرية (Symetrique) إذا تحقق
ما يلي: (سہ ∋ م وَ ش ∋ م
كلما كان سہ ع ش كان أيضاً ش ع سہ.



٢ - يقال عن العلاقة ع = (م ، م ، ب)
إنها انعكاسية Reflexive إذا تحقق ما
يلي: مهما كـان سہ ∋ م فإن سہ ع
سہ



٣ - يقال عن العلاقة ع = (م ، م ، ب)
إنها متعدية Transitive عندما يتحقق
ما يلي:
كلما كان سہ ع ش و ش ع ص فإن سہ ع ص
يتحقق أيضاً

- يقال عن علاقة ع = (م ، م ، ب) إنها
متخـالفة إذا تحقق مـا يلي: مهـما كـان
سہ ∋ م وَ ش ∋ م
بحيث إن سہ ≠ ش وإذا كان سہ ع ش فإن ش ع̸ سہ
أو: سہ ع ش وش ع س يؤدي إلى سہ = ش.

- علاقة الترتيب:

تعريف: يقال عن علاقة في مجموعة إنها علاقة ترتيب إذا كانت انعكاسية، مخالفة ومتعدية.

- العلاقة (⊇) في ج (م) التي لا تسمح إلا بمقارنة بعض العناصر مع بعضها البعض تسمى علاقة ترتيب جزئي
- في علاقة ⩽ في الأعداد الطبيعية N نلاحظ أن أي عنصرين أخذتهما من N يمكن مقارنتهما. وبذلك نقول إن العلاقة ⩽ هي علاقة ترتيب كلي

علاقة التكافؤ Relation d'équivalence

- تعريف: يقال عن علاقة في مجموعة إنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

الطلاب في مدرسة معينة والعلاقة «ينتمي إلى الصف نفسه» تعتبر علاقة تكافؤ وما الصفوف المدرسية سوى صفوف التكافؤ... وعليه.

- T = (ك، ك، ب) علاقة تكافؤ في ك. لنفترض سہ ∋ ك، صف تكافؤ سہ هو مجموعة العناصر التي تكافىء سہ طبق العلاقة T ورمزياً: صف (سہ) = س° = {ش/ش ∋ ك على أن يكون معنا ش ≡ سہ (طبق* T)}
- إن أي عنصر من ك ينتمي بالضرورة إلى إحدى صفوف التكافؤ طبق T
- مهما كان العنصران المنتميان إلى الصف نفسه فإنهما يتكافآن طبق العلاقة.
- إذا تكافأ عنصران طبق العلاقة T فإن لهما الصف نفسه
- Tعلامة تكافؤ المجموعة ك

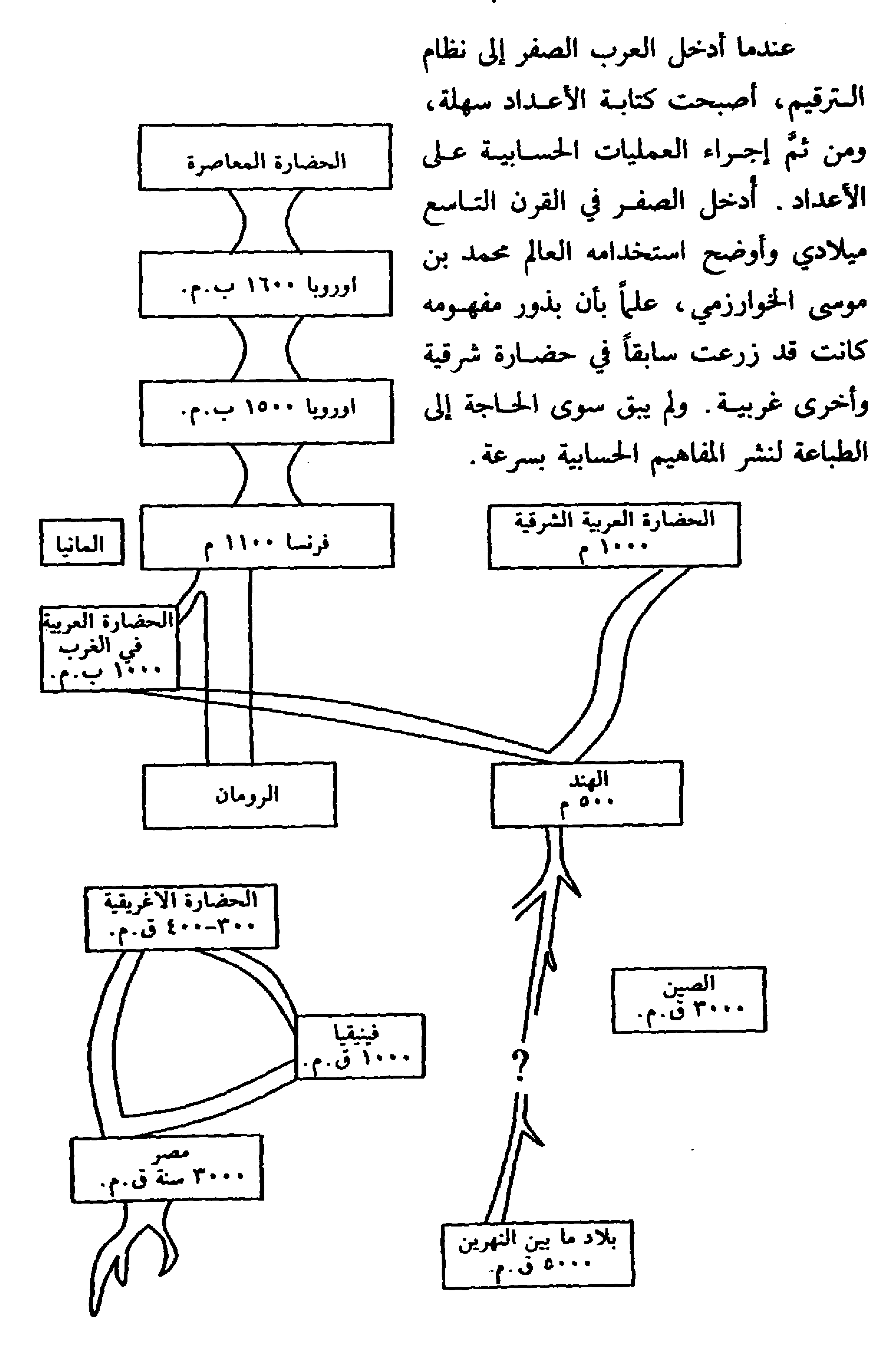
$\frac{ك}{T}$ هي مجموعة صفوف التكافؤ وتسمى حاصل تقسيم ك بالعلاقة T.

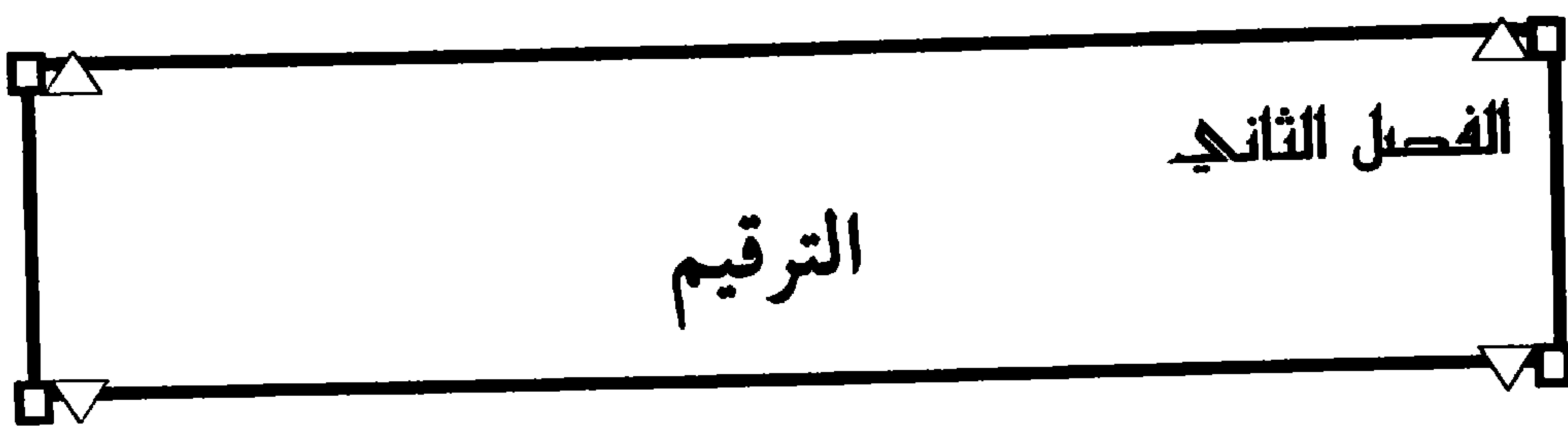
إن علاقة التكافؤ هي من أهم المفاهيم الرياضية نظرياً وتطبيقياً...

طبق = Modulo

من أين أتى نظامنا في الترقيم؟

عندما أدخل العرب الصفر إلى نظام الترقيم، أصبحت كتابة الأعداد سهلة، ومن ثمّ إجراء العمليات الحسابية على الأعداد. أدخل الصفر في القرن التاسع ميلادي وأوضح استخدامه العالم محمد بن موسى الخوارزمي، علماً بأن بذور مفهومه كانت قد زرعت سابقاً في حضارة شرقية وأخرى غربية. ولم يبق سوى الحاجة إلى الطباعة لنشر المفاهيم الحسابية بسرعة.





الفصل الثاني

الترقيم

ظهر الترقيم الموضعي بشكله النهائي بعد أن تمَّ اكتشاف الصفر الذي يعتبر عدد عناصر المجموعة الخالية. فقد ظهر تاريخياً: عند البابليين وعبّر عنه الهنود بالنقطة (.) وشعوب المايا بالصدفة ( ) وقد انطلقت فكرته عند الهنديين وأثبت مفهومه علماء الحضارة الإسلامية. ولم يُستخدم فعلاً في أوروبا الغربية قبل القرن الرابع عشر.

- استخدم إنسان ما قبل التاريخ الترقيم الشفهي؛ عرف منه عند السومريين:
  ١ = رجل ٢ = امرأة ٣ = كثرة
- **في بلاد ما بين النهرين** ظهر أول ترقيم موضعي (نظام عشري ونظام ستيني)
- **في الصين**. - استخدم الصينيون الأرقام من ١ إلى ٩ واتبعوا نظام الجمع والضرب وقوى العشرة. . .
- **في مصر**. - بعد تطور أنواع الترقيم المختلفة، اتخذ الترقيم الهيروغليفي النظام العشري مع اتباع مبدأ التكرار والجمع معاً. لكل قوة من قوى العشرة لها رمز معين.
- الفنيقيون والعرب قبل الإسلام والإغريق استخدموا الأحرف كرموز للأعداد. كما هو معروف أ = ١، ب = ٢، ج = ٣. . .

الترقيم عبر التاريخ

الحالي	بلاد ما بين النهرين	مصر	الصين	اليونان	الرومان	الحضارة الاسلامية	المايا
0	◀ ◀					0	○
1	▼	I	ر	α′	I	١	○
2	▼▼	II	رر	β′	II	٢	○○
3	▼▼▼	III	ررر	γ′	III	٣	○○○
4	▼▼▼▼	IIII		δ′	IV	٤	○○○○
5	▼▼▼▼▼	IIIII	Ξ	ϵ′	V	٥	——
6	▼▼▼▼▼▼	III III	A	τ′	VI	٦	○ ——
7	▼▼▼▼▼▼	IIII III	t	ς′	VII	٧	○○ ——
8		IIII IIII	^	η′	VIII	٨	○○○ ——
9		IIIIIIIII	r	θ′	IX	٩	○○○○ ——
10		∩	+	t′	X	١٠	═══
20		∩∩	+ رر	X′	XX	٢٠	0 ●
60		∩∩∩∩∩∩	A +	ξ′	LX	٦٠	○○○ ●
100		و		ρ′	C	١٠٠	—— •

ما هي أنواع الترقيم الممكنة؟

- تتيح أنواع الترقيم الحالية إمكانية كتابة كل عدد باستخدام عدد قليل من الرموز، يتم تغيير ذلك وفقاً للأساس المعتمد (أساس: اثنين، ثلاثة، أربعة. . . عشرة. . . اثني عشر. . .)
- في كل لغات العالم، تكونت كلمات وصور ترمز للأعداد الأولى حتى العشرة عادة، بالنسبة للأعداد الأكبر استخدمت عادة القوى العشرية Puissances décimales. . .
هذه الطريقة استخدمت لتركيب أعداد أخرى وذلك بإدخال فكرة الجمع (مثل ١٨ = ٨ + ١٠) أو الضرب (ثمانون بالفرنسية = ٤ × ٢٠). وأحياناً فكرة الطرح (في الترقيم الروماني IX = ١٠ − ١)
- في النظام الثنائي نستخدم الأرقام التالية: {٠، ١ }
- في النظام الثلاثي نستخدم الأرقام التالية: {٠، ١، ٢}
- في النظام الرباعي نستخدم الأرقام التالية: {٠، ١، ٢، ٣}
- في النظام الخماسي نستخدم الأرقام التالية: {٠، ١، ٢، ٣، ٤}
- في النظام السداسي نستخدم الأرقام التالية: {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}
- في النظام السباعي نستخدم الأرقام: {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}
- في النظام الثماني نستخدم الأرقام: {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}
- في النظام التسعي نستخدم الأرقام: {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}
- في النظام العشري نستخدم الأرقام: {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}
- في النظام الاثني عشري نستخدم الأرقام: {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، س، ص}

يمكننا اتخاذ أي عدد كأساس لنظام عددي معيَّن، فلا نكتفي عند هذا الحد، بل يمكننا اعتماد النظام العشريني أو النظام الستيني أو النظام a.

- ما الفرق بين الرقم والعدد؟

- الرقم هو رمز يساهم في كتابة الأعداد. هو صورة تحدِّد شكل معيَّن يطلق عليه اسم العدد: مثلاً الرقم ٢ = II = 2 = ب = B. . كل هذه الرموز هي للرقم اثنين.

- العدد هو الكم لمجموعة معينة، أو عدد عناصر مجموعة معينة: مثلاً العدد ١٨٥ مكوَّن من ثلاثة أرقام وفقاً لمنازل معينة.

الأرقام من صفر إلى ٩ هي أرقام وأعداد، أما الأعداد من ١٠ وما فوق فكلها أعداد تتكوَّن من رقمين أو ثلاثة أرقام أو أربعة.

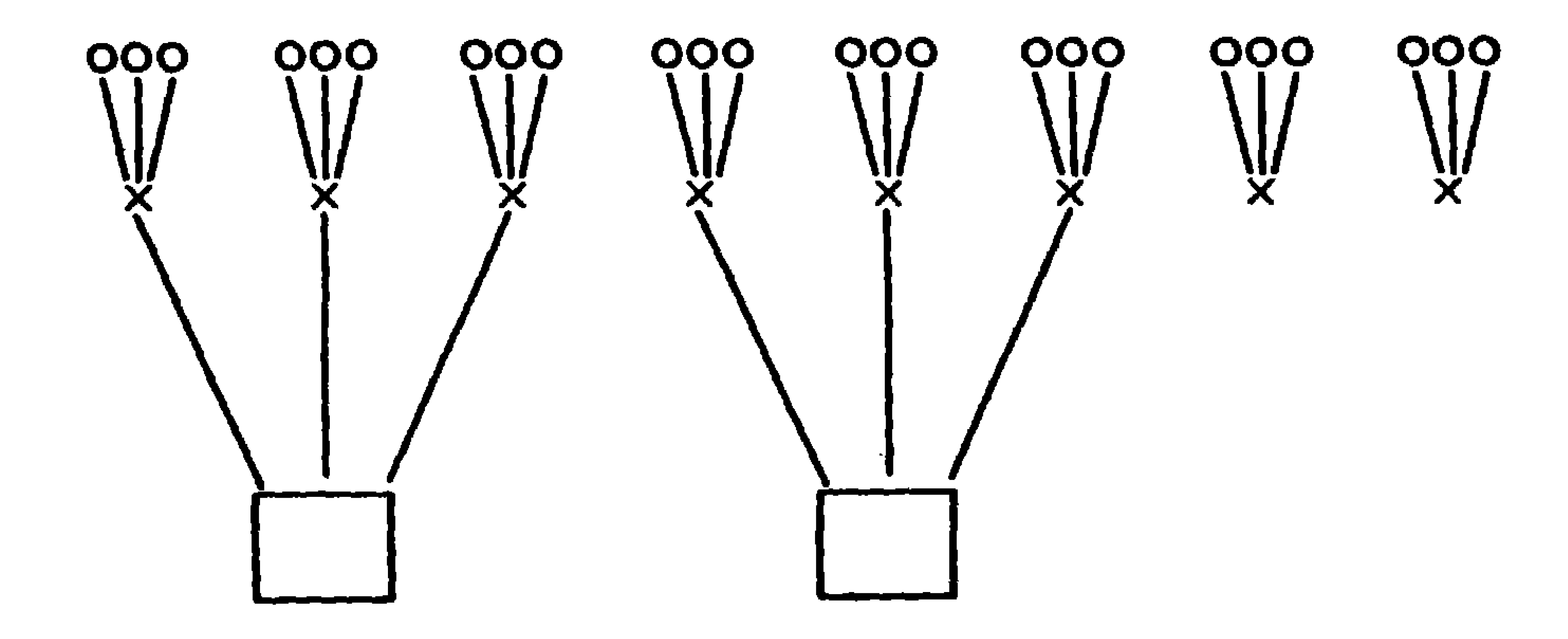
مثل نموذجي للكتابة بين الأنظمة العددية اخترنا الأسس التالية: النظام الثنائي، والنظام الخماسي، والنظام العشري والنظام الاثني عشري للمقابلة فيما بينها

قديماً عدَّ البابليون في النظام الستيني، وعدَّت المايا بالنظام العشريني وعدَّ الهنود في النظام العشري

النظام الثنائي	٠	١	١٠	١١	١٠٠	١٠١	١١٠	١١١	١٠٠٠	١٠٠١	١٠٠١٠	١٠١١	١١٠٠	١١٠١	١١١٠	١٠١١١
النظام الخماسي	٠	١	٢	٣	٤	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٤٣
النظام العشري	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	٢٣
النظام الإثني عشري	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	س	ص	١٠	١١	١٢	ص١

- كيف يتم التحويل من نظام إلى آخر؟

مثلاً: حوِّل العدد ٢٤ في النظام العشري إلى النظام الثلاثي.



إذاً ٢٤ (عشري) = ٢٢٠ (ثلاثي).

وبالطريقة الحسابية نعمل على النحو التالي:

٣	٣	٣	٢٤
٠	٢	٨	٠
	٢	٢	

حوِّل العدد ٣٢٠١ من النظام الرباعي إلى النظام السبعي؟

نحوِّل أولاً إلى النظام العشري

٣٢٠١ = (٣ × ٤^{٣}) + (٢ × ٤^{٢}) + (٠ × ٤) + ١ = ٢٢٥ في النظام العشري

ومن ثم وفقاً للطريقة السابقة ٢٢٥ (عشري) = ٤٤١ (سباعي) .

الفصل الثالث

لغة الحاسب الالكتروني

هناك عدة أنواع من الحاسب الإلكتروني نذكر منها:

- حاسب الكتروني رقمي Digital: وهو حاسب الكتروني يتعامل مع البيانات غير المتصلة (الأرقام) ويقوم بالعمليات الحسابية والمنطقية على هذه البيانات.
- جهاز حاسب مماثل يتعامل مع بيانات تناظرية ويمكنه إجراء العمليات الفيزيائية على هذه البيانات.

فالحاسب الالكتروني جهاز يمكنه استقبال البيانات وتنفيذ عمليات تشغيل معينة عليها. يتكون نظام الحاسب الالكتروني الرقمي في العادة من: ١ ـ وحدة التشغيل المركزية ٢ ـ وحدة الإدخال ٣ ـ وحدة الإخراج ٤ ـ وحدة تخزين خارجية أو الذاكرة.

ومن أنواع الحاسب نذكر:

- حاسب الكتروني عام الأغراض.
- حاسب الكتروني لغرض خاص.
- حاسب الكتروني متزامن.

كيف يعمل الحاسب الالكتروني

كي يعمل الحاسب الالكتروني، يجب أن تقدم له برنامجاً، فالحاسب لا يستطيع أن يعمل إذا لم نقل له ما يجب أن يفعله. مثلاً لجمع عددين يجب إدخال العددين في الحاسب ويطلق عليهما اسم معطيات.

إن وحدة الدخول سهلة الاستعمال، وهي اللمسات الخارجية التي بواسطتها يمكننا إدخال البرنامج إلى الآلة (المعطيات). تتجمّع هذه المعطيات في الذاكرة التي تعرف باسم RAM تتصل مباشرة بأقراص وبالشرائط المغنطة. ذاكرة أخرى تعمل تحت اسم

ROM (ذاكرة ميتة) تشتمل على المعلومات التي تؤثر على العقل الالكتروني نفسه. عندما تجري أو تنفّذ الحسابات يرسل الحاسب النتائج نحو وحدة الخروج أي نحو شاشة معينة أو طباعة على الشاشة.

لا يستخدم الحاسب الالكتروني إلاّ عددين للعمل هما صفر وواحد، أي أن الحاسب يستخدم دائماً النظام الثنائي في العد ويتم إجراء كل الحسابات بعد تحويلها إلى النظام الثنائي، ثمّ تحوَّل الإجابة إلى النظام العشري وتظهر على الشاشة.

ماذا يجري داخل الحاسب؟

كل عدد يدخل إلى الحاسب يتحوَّل إلى النظام الثنائي وتجري عليه الحسابات المطلوبة. من ثمّ تحوِّل الوحدة المركزية أي الدماغ الأحرف والأعداد والإشارات إلى عدد في النظام الثنائي ويعمل التيار الكهربائي على هذا الأساس لحساب النتائج على أساس أن:

١ ـ يمرّ التيار الكهربائي

٠ ـ لا يمرّ التيار الكهربائي

وتتسلسل عمليات إقفال التيار الكهربائي وفتحه، فيستطيع الحاسب إجراء العمليات الحسابية بسرعة وتحويلها ومن ثمّ إعطاء الإجابات الصحيحة. إذاً الحاسبات أنظمة معقدة جداً لمفاتيح كهربائية تفتح وتغلق آلاف المرات في الثانية بذلك يستطيع كل رقم أن يحوِّل التيار إلى خط مغلق أو خط مفتوح وفقاً للجدول التالي:

اللمسات	A	B	C	D	E	F	G	I
٠ يفتح الخط:								
١ يغلق الخط:	١	٠	١	١	١	٠	٠	١

ما هي سرعة عمل الحاسب الالكتروني:

تستطيع الحاسبات الحديثة المتطورة أن تنفذ ١٠٠٠ مليار عملية في الثانية. من

المسائل المعقدة عند الحاسب هي التنبوء بحالة الطقس. أجل لمعرفة حالة الطقس في الغد، من الضروري إجراء عدة ملايين من الحسابات المختلفة بسبب وجود عوامل عديدة تدخل في اللعبة. فقط السوبر حاسب يستطيع الوصول إلى نهاية العمليات الحسابية.

إذا عمل الحاسب الالكتروني بسرعة كبيرة، ذلك لأنَّه يقسِّم الحسابات الواجب إجراؤها إلى عدة عمليات بدائية حيث لا يتم استخدام أرقام النظام الثنائي لأنها رموز كهربائية كما مرَّ معنا، وتسمح بمرور التيار الكهربائي. الوحدة المركزية تجمع كل هذه الحسابات وتحلُّ المسألة.

كيف يستطيع الحاسب الالكتروني أن يتكلم؟

بعض الحاسبات تملك وحدة تركيب الكلام أي بإمكانها أن تلفظ بعض الكلمات كل كلمة تملك رمزاً (Code) كهربائياً يحدث داخل الحاسب فيرسله منظمٌ للصوت كما يلفظ مكبر الصوت. . .

الفصل الرابع

الترقيم العالمي - النظام العشري

- العدد الكمي Cardinal والعدد الترتيبي Ordinal

إن السنة ١٩٦٤ هي مكونة من ٣٦٦ يوماً: ٣٦٦ هو عدد كمي بينما السابع من شهر آذار أو الشهر الثالث من السنة، أو اليوم السابع هو عدد ترتيبي أو رقمي لإنّه يثبت وجود ترتيب هذا اليوم بالنسبة لأيام السنة بكاملها.

- مجموعة الأعداد الطبيعية ط أو N. إنها الأعداد التي يستخدمها الإنسان لعد الأشياء التي يراها أو يدركها. عرفت عربياً تحت مجموعة ط = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، . . . .}

وأجنبياً $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6....\}$

خصائص الجمع في ط:

- الجمع تبديلي أي ٣ + ٥ = ٥ + ٣

وبشكل عام: ب + حـ = حـ + ب

- الجمع تجميعي: (أ + ب) + حـ = أ + (ب + جـ).
- للجمع عنصر محايد: الصفر: ب + ٠ = ٠ + ب = ب

خصائص الضرب في ط

- الضرب تبديلي: ب × حـ = حـ × ب
- الضرب تجميعي: (ب × حـ) × د = ب × (حـ × د).
- للضرب عنصر محايد: واحد: ب × ١ = ١ × ب = ب
- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع: مثلاً ٥ × (٣ + ٤) = (٥ × ٣) + (٥ × ٤)

وبشكل عام ب × (س + ص) = (ب × س) + (ب × ص)

- الضرب توزيعي بالنسبة للطرح أيضاً

بشكل عام ب × (س − ص) = (ب × س) − (ب × ص)

● مجموعة الأعداد النسبية الصحيحة ص = $\mathbb{Z}$

حيث إن

$\mathbb{Z}$ = {... -٤، -٣، -٢، -١، ٠، +١، +٢، +٣، +٤...}

تبقى خصائص الجمع كما هي في ط وتضاف خاصية التناظر أي لكل عنصر نظير فإذا كان س ونظيره س' = فاننا نحصل س + سَ= سَ + س= صفر.

● مجموعة الأعداد العشرية؛ وهي الأعداد ذات الفاصلة في النظام العشري. تتكون من الكسور العشرية حيث تتركب المخارج من قوى عشرية. تقع الفاصلة إلى يمين الرقم الذي يمثل الوحدات التامة. مثلاً:

$$٢٦,٢٧٤ = ٢٦ + \frac{٢}{١٠} + \frac{٧}{١٠٠} + \frac{٤}{١٠٠٠}$$

ويكتب العدد العشري بالقوى العشرية كما يلي:

$$٢٦,٢٧٤ = ٢٦٢٧٤ \times ١٠^{-٣}$$

إذا أطلقنا ع على مجموعة الأعداد العشرية نكتب كما يلي:

$$ع = \left\{ \frac{أ}{١٠^{ب}} \text{ شرط أن تكون } أ \in ص \text{ و } ب \in ط \right\}$$

● مجموعة الأعداد العقلانية $\mathbb{Q}$ هي مجموعة أعداد تكتب بشكل كسري بما فيها الكسور العشرية. أما الأعداد الصحيحة فإنها تكتب على النحو التالي $٦ = \frac{٦}{١}$

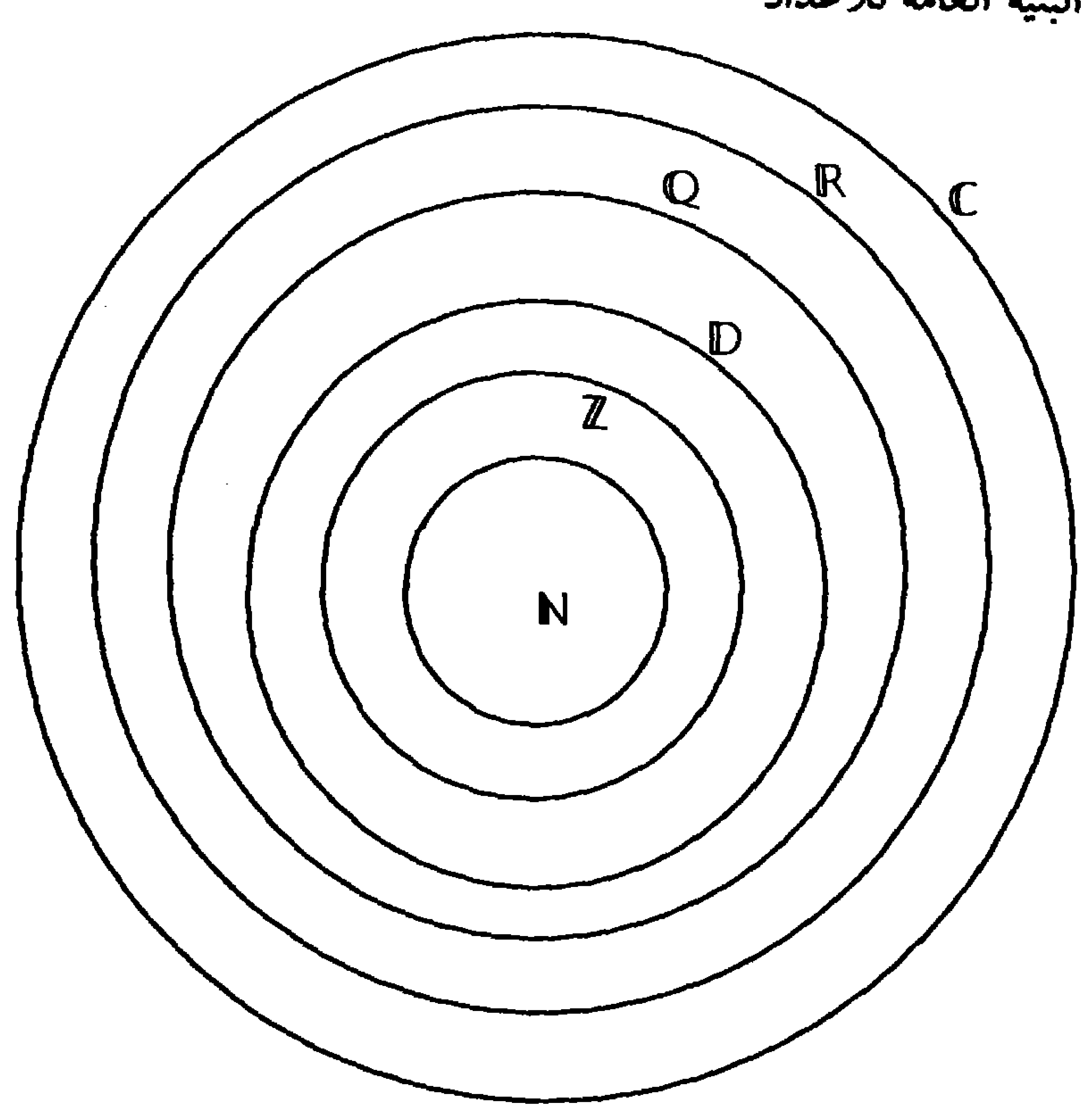
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{أ}{ب} \text{ حيث أن } أ \in ص \text{ وَ } ب \in ص^{*} \right\}$$

● مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو حـ هي مجموعة الأعداد العقلانية السابقة الذكر مضاف إليها مجموعة الأعداد اللاعقلانية وهي التي تشتمل على الجذور مثل $\sqrt{٣}$، $\sqrt{٧}$... حيث إن الأرقام بعد الفاصلة لا تنتهي.

نظير العدد ٧ = $\frac{١}{٧}$ والعكس بالعكس.

- مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ وتشمل إضافة إلى الأعداد الحقيقية الأعداد الخيالية التي تحوّل إلى الكتابة ١ ± $\sqrt{-1}$

البنية العامة للأعداد



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

الترقيم العشري

● الأعداد الطبيعية

المنازل

كتابة الأعداد	مليون مليار			آلاف المليار			المليار			الملايين			الآلاف			الآحاد		
	مئات	عشرات	آحاد	مئات	عشرات	آحاد	مئات	عشرات	آحاد	مئات	عشرات	آحاد	مئات	عشرات	آحاد	مئات	عشرات	آحاد
٦٨ ٥٤٧														٦	٨	٥	٤	٧
												٧	٣	٤	٥	٦	١	٨
							٨	٦	٧	٣	٠	٤	٧	٥	٦	١	٩	٩
					١	٧	٦	٤	١	٨	٧	٥	٣	١	٤	٢	٩	١
			٤	٦	٥	٣	٢	٧	١	٦	٨	٧	٤	٩	٨	٥	٠	٠
		١	٦	٠	٠	١	٠	٠	٠	٢	٠	١	٠	٠	٧	٨	٦	٤
	٥	٠	٠	٧	٠	٠	٨	٠	٠	٦	٠	٠	٣	٠	٠	٢	٠	١

- اقرأ هذه الأعداد واكتبها على الهامش الباقي اليسار.

● الأعداد العشرية

	منزلة الآلاف			منزلة الآحاد			(الفاصلة) المنازل العشرية											
كتابة الأعداد	مئات	عشرات	آحاد	مئات	عشرات	آحاد	جزء من عشرة	جزء من مئة	جزء من ألف	جزء من عشرة آلاف	جزء من مئة ألف	جزء من مليون	جزء من عشرة ملايين	جزء من مئة مليون	جزء من مليار	جزء من عشرة مليارات	جزء من مئة مليار	....
٦٩٣،٨٦				٦	٩	٣	٨	٦										
٧١٠٩،٣٤٦			٧	١	٠	٩	٣	٤	٦									
٠،٠٠٠٠٦٤						٠	٠	٠		٦	٤							
٨٩٦٤٢،٥٣٠٠		٨	٩	٦	٤	٢	٥	٣	٠	٠								
١٨،٦٧٨٥٤٣٢١					١	٨	٦	٧	٨	٥	٤	٣	٢	١				
٣٠٠،٠٠٠٧				٣	٠	٠	٠	٠	٠	٧								

- إقرأ هذه الاعداد وراقب كتابتها على الهامش من جهة اليسار.

تذكير ببعض خصائص العدد. ـ لغوياً

العدد: أصلي وترتيبي

أولاً: أقسام العدد الأصلي: مفرد، مركب ـ معطوف ـ عقود

ثانياً أحكام العدد الأصلي.

١ ـ المفرد:

١ و٢: معربان ـ يوافقان المعدود تذكيراً وتأنيثاً، لا يضافان إلى معدودهما

مثلاً جاء رجل واحدٌ ـ رأيت امرأتين اثنتين. . .

من ٣ إلى ١٠: تخالف المعدود وتعرب بالحركات بحسب العامل، تضاف إلى معدودها ويكون معدودها جمعاً مجروراً

مثلاً: اشتريت ثلاث تفاحات ـ عندي أربعة أولاد، درست في كتب أربعة

ملاحظة: يعتبر في المعدود مفرده لا جمعه.

٢ ـ المركّب: من ١١ إلى ١٩

أَحَدَ عَشَرَ: يوافق بجزئيه المعدود ـ مبني على الفتح دائماً ـ معدوده مفرد منصوب

مثلاً في الصف أَحَدَ عَشَرَ صبياً وإحدى عشرة بنتاً.

اثنا عشر: يوافق بجزئيه المعدود، يعرب جزؤه الأول إعراب المثنى وتحذف نونه. يبنى الجزء الثاني ويكون معدود مفرداً منصوباً.

مثلاً: راقبت اثني عشر تلميذاً واثنتي عشرة تلميذة.

نجح الاثنا عشر تلميذاً والاثنتا عشرة تلميذة.

من ١٣ إلى ١٩ : يخالف جزؤه الأول المعدود في التذكير والتأنيث، بينما يبقى الثاني موافقاً. يكون الجزآن مبنيين على الفتح ومعدودهما مفرداً منصوباً.

مثلاً: اشترى تاجر خمس عشرة سيارة وباع الواحدة منها بثلاثة عشر ألفاً فبكم ليرة باعها جميعاً.

ملاحظة: تفتح الشين مع المعدود المذكر وتسكن مع المعدود المؤنث.

٣ ـ المعطوف: من ٢١ إلى ٩٩

واحد وعشرون: يعرب الجزء الأول بحسب قاعدة المفرد والثاني بحسب قاعدة جمع المذكر السالم. والمعدود مفرد منصوب.

في التأنيث نقول: إحدى أو واحدة وعشرون. مثلاً غرست إحدى وعشرين شجرة. جاء واحد وعشرون تلميذاً.

اثنان وعشرون: يكون الجزآن معربين، الأول بحسب قاعدة المثنى والثاني بحسب قاعدة جمع المذكر السالم. المعدود بعدهما مفرد منصوب في التأنيث نقول: اثنتان وعشرون (تثبت النون في الجزء الأول) تذكيراً وتأنيثاً لانتفاء الاضافة مثلاً قرأت اثنين وعشرين كتاباً في اثنتين وعشرين ساعة.

من ٢٣ إلى ٩٩: الجزء الأول يخالف المعدود، تذكيراً وتأنيثاً. الجزآن معربان بحسب العامل والمعدود مفرد منصوب.

مثلاً: شهر شباط إما ثمانية وعشرون يوماً وإما تسعة وعشرون أو يتألف المجلس النيابي الحالي من تسعة وتسعين نائباً، نلت ثلاثاً وثلاثين علامة جيدة.

٤ ـ العقود: من ٢٠ إلى ٩٠ أي ٢٠ ـ ٣٠ ـ ٤٠ ـ ٥٠ ـ ٦٠ ـ ٧٠ ـ ٨٠ ـ ٩٠ العدد ثابت بصورة واحدة تذكيراً وتأنيثاً إنما يخضع للعامل الإعرابي والمعدود بعده مفرد منصوب.

مثلاً: نحن في القرن العشرين، عمر جدي تسعون سنة.

ملاحظة: ١٠٠ و١٠٠٠ يلحقان بالعدد المفرد ويثبتان على لفظ واحد والمعدود بعدهما مفرد مجرور. مثلاً: مائة كتاب، مائة مسطرة، ألف سنة.

فائدة: يمكن أن تتصل (مائة) بعددها مثلاً ثلاثمائة
- تدخل الألف في كتابتها (مائة) ولكنها لا تلفظ وتكتب بدون ألف (مئة)
- إذا سبقت ماية بعدد مفرد تبقى مفردة.
مثلاً: ثلاثمائة، خمسمائة، بعكس ألف. مثلاً ثلاثة آلاف.

ثالثاً: أقسام العدد الترتيبي: مفرد - مركب - معطوف - عقود
رابعاً: أحكام العدد الترتيبي

١ - المفرد: **الأول**: يعرف في حالتي الإضافة والتعريف بأل.
الأول يعرف إذا دلَّ على تدرج في الزمان أولاً - ثانياً... الخ... يمنع من الصرف إذا تضمن معنى النعت.
مثلاً: هو مستشار أول وهل في السباق أوّلَ

ملاحظة: نقول في التأنيث: الأولى
وفي التثنية: الأولان - الأولين - الأوليان - الأوليين
وفي الجمع الأولون - الأولين - الأول - الأوائل - الأوليات

من الثاني إلى العاشر: يوافق معدوده في حالاته كلها
مثلاً: الرجل الثاني، المرأة التاسعة.

٢ ـ **المركب من ١١ إلى ١٩**: يوافق في جزئيه ويكونان مبنيين على الفتح ويجوز تسكين آخر الجزء الأول إذا كان منتهياً بحرف علة.

مثلاً: هذا اليوم الحاديَ عشر (أو الحاديْ) ـ هذه السنة الحادية عشرة ـ هذا الدرس الخامسَ عشَرَ ـ قرأت الأمثولة الرابعةَ عشرةَ.

٣ ـ **المعطوف من ٢١ إلى ٩٩**: الجزء الأول منه يوافق الموصوف في التذكير والتأنيث. غير أن الجزئين معربان

مثلاً: جاء الرجل الثالث والعشرون. قرأت في الصفحة الخامسة والعشرين ـ مزقت الصفحة السادسة والعشرين.

٤ ـ **العقود من ٢٠ إلى ٩٠**: تثبت بلفظ واحد في التذكير والتأنيث، وتعرب إعراب موصوفها ظاهراً كان أم مضمراً.

مثلاً: جاء الرجل العشرون ـ حل في المرتبة الثلاثين الخ . . .

ملاحظة: المائة والألف تثبتان بلفظ واحد في التذكير والتأنيث ويتبعان موصوفهما في الإعراب مثلاً: الفصل المائة ـ المرحلة الألف.

خامساً: أمثلة تطبيقية

١ ـ العدد المرفوع: مبتدأ ـ خبر المبتدأ ـ اسم كان ـ خبر إن ـ الفاعل ـ نائب الفاعل ـ التوابع

في إحد المصارف ٣٤٦٥٨٢٧ أي ثلاثة ملايين وأربعماية وخمسة وستون ألفاً وثمانيماية وسبع وعشرون ليرة.

٢ ـ العدد المنصوب: اسم ان ـ خبر كان ـ المفاعيل ـ التوابع الخ . . .

ربحت ٦٧٣٢٢ غرشاً أي ربحت سبعاً وستين ألفاً وثلاثماية واثنين وعشرين غرشاً

٣ ـ العدد المجرور: بحرف الجر بالإضافة بالتبعية إلخ . . .

دفعتُ مبلغ ١٢٥١ ليرة أي ألفٍ ومائتين واحدى وخمسين ليرة.

الأعداد الأوّلية من صفر حتى ٧٠٠٠

2	353	811	1297	1823	2371	2909	3517	4073	4663	5281	5861	6481
3	359	821	1301	1831	2377	2337	3527	4079	4673	5297	5867	6491
5	367	823	1303	1847	2381	2927	3529	4091	4679	5303	5869	6591
7	373	827	1307	1861	2383	2939	3533	4093	4691	5309	5879	6529
11	379	829	1319	1867	2389	2953	3539	4099	4703	5323	5881	6547
13	383	839	1321	1871	2393	2957	3541	4111	4721	5333	5897	6551
17	389	853	1327	1873	2399	2963	3547	4127	4723	5347	5903	6553
19	397	857	1361	1877	2411	2969	3557	4129	47[illegible]	5351	5923	6553
23	401	859	1367	1879	2417	2971	3559	4133	4733	5381	5927	6569
29	409	863	1373	1889	2423	2909	3571	4139	4761	5387	5993	6571
31	419	877	1381	1901	2437	3001	3581	4153	4759	5393	5953	6577
37	421	881	1399	1907	2441	3011	3583	4157	4783	5399	5981	6581
41	431	883	1409	1913	2447	3013	3593	4159	4787	5407	5987	6599
43	433	887	1423	1931	2459	2023	3607	4177	4789	5413	6007	6607
47	439	907	1427	1933	2467	3037	3613	4201	4793	5417	6011	6619
53	443	911	1429	1949	2473	3041	3617	4211	4699	5419	6029	6637
59	449	919	1533	1951	2477	3049	3623	4217	4801	5431	6037	6653
61	457	929	1439	1973	2503	3061	3631	4219	4813	5437	6043	6659
67	461	937	1447	1979	2521	3067	3637	4229	4817	5441	6047	6661
71	463	941	1451	1987	2531	3079	3643	4231	4831	5443	6053	6673
73	467	947	1453	1993	2539	3083	3659	4241	4861	5449	6067	6679
79	479	953	1459	1997	2543	3069	3671	4243	4871	5471	6073	6689
83	487	967	1471	1999	2549	3109	3673	4253	4877	5477	6079	6691
89	491	971	1481	2003	2551	3119	3677	4259	4889	5479	6089	6701
97	499	977	1483	2011	2557	3121	3691	4261	4903	5483	6091	6703
101	503	983	1487	2017	2579	3137	3697	4271	4909	5501	6101	0709
103	509	991	1489	2027	2591	3163	3701	4273	4919	5503	6113	6719
107	521	957	1493	2029	2593	3167	3709	4283	4931	5507	6121	6733
109	523	1009	1499	2039	2609	3169	3719	4289	4933	5519	6131	6737
113	541	1013	1511	2053	2617	3181	3727	4297	4937	5521	6133	6761
127	547	1019	1523	2063	2621	3187	3733	4327	4943	5521	6143	6763
131	557	1021	1831	2089	2633	3797	3739	4337	4951	5531	6151	5779
137	53	1031	1543	2051	2647	3203	3761	4339	4957	5557	6163	6781
139	569	1033	1549	2083	2657	3209	3767	4349	4967	5563	6173	6791
149	573	1039	4153	2087	2659	3217	3769	4357	4969	5569	6297	6793
151	557	1049	1559	2089	2663	3221	3779	4363	4973	5573	6199	6803
157	587	1051	1567	2099	2674	3229	3797	4373	4987	5581	6203	6823
163	893	1061	1571	2111	2677	3251	3797	4391	4993	5591	6211	6827
167	559	1063	1579	2113	2683	3253	3803	4397	4999	5623	5217	6829
173	601	1069	1583	2129	2687	3257	382	4409	5003	5639	6221	6823
179	607	1087	1597	2131	2689	3259	3823	4421	5009	5641	2229	5041
181	613	1091	1601	2137	2693	3271	3833	4423	5011	5647	6247	6857
191	617	1093	1607	2141	2699	3299	3847	4441	5021	5651	6257	3863
193	619	1097	1609	2143	2707	3301	3851	4447	5023	5653	6263	6869
197	631	1103	1613	2153	2711	3307	3853	4451	5039	5657	6269	6871
199	641	1109	1619	2161	2713	3313	3863	4457	5051	5659	3271	6883
211	643	1117	1621	2179	2719	3319	3877	4463	5059	8669	6277	6899
223	647	1123	1627	2203	2729	3323	3881	4481	5077	5683	6287	6907
227	653	1129	1637	2207	2731	3329	3889	4483	5081	5689	6299	6911
229	659	1151	1657	2213	2741	3331	3907	4493	5087	5893	6301	6917
233	661	1153	1663	2221	2749	3143	3911	4507	5099	5701	6311	6947
239	673	1163	1667	2237	2793	3347	3917	4513	5101	5711	6317	6949
241	677	1171	1689	2239	2767	3359	3919	4517	5107	5717	6323	6959
251	683	1181	1693	2243	2777	3361	3923	4519	5113	5737	9329	6961
257	691	1187	1697	2251	2789	3371	3929	4523	5119	5741	6337	6967
263	701	1193	1699	2267	2791	3373	3931	4547	5147	5743	6343	6971
269	709	1201	1709	2269	2797	3389	3943	4594	5153	5749	6353	6977
271	719	1213	1721	2273	2601	3391	3947	4561	5167	5779	6359	6983
277	727	1217	1723	2281	2803	3407	3967	4567	5141	5783	6361	6991
281	733	1223	1733	2287	2819	3413	3989	4583	5179	5791	6367	6097
283	739	1229	1741	2293	2833	3433	4001	4591	5189	5801	6376	
293	743	1231	1747	2291	2837	3449	4003	4597	5197	5807	6373	
293	743	1231	1747	2297	2837	3449	4003	4597	5197	5807	6379	
307	751	1277	1753	2309	2843	3487	4007	4603	5209	5813	6313	
311	757	1249	1759	2311	2851	3461	4013	4621	5227	5821	6397	
313	761	1259	1777	2353	2857	3463	4019	4637	5231	5827	6421	
317	769	4277	1783	2339	2861	3467	4021	4639	5233	5839	6427	
331	773	1279	1787	2341	2879	3469	4027	4643	5237	5843	6449	
337	787	1283	1789	2347	2887	3491	4049	4649	5261	5849	6541	
347	797	1289	1801	2351	2897	3499	4051	4651	5273	5851	6469	
349	809	1291	1811	2357	2903	3511	4057	4657	5279	5857	6473	

الفصل الخامس

المقياس Echelle

إن نسبة قياس أبعاد شيء معين على أبعاده في الرسم تسمى القياس.

- إذا كان المقياس حسب الأبعاد تماماً يسمى نسبه ١:١ في أن مقياس التكبير يحول نسبة ١:١ إلى نسبة أكبر والعكس في التصغير.
- في جميع المجالات الميكانيكية والكهربائية والأعمار والفن... وغيرها تستخدم عادة المقاييس التالية:

ـ للتكبير ٥٠:١ ٢٠:١ ١٠:١ 5:1

ـ للتصغير ١:٥ ١:١٠ ١:٢٠ ١:٥٠ ١:١٠٠ ١:٢٠٠ ١:٥٠٠
١:١٠٠٠ ١:٢٠٠٠ ١:٥٠٠٠ ١:١٠٠٠٠ ١:٢٠٠٠٠

- في مقاييس الهندسة والبناء ينصح بالمقاييس التالية:

Plan de masse ١:٢٠٠٠

Plan d'ensemble ١:١٠٠٠ ١:٥٠٠ ١:٢٠٠

Dessins d'avant projet detaillé ١:٢٠ ١:١٠ ١:٥ ١:١

- في الخرائط الجغرافية تستخدم المقاييس التالية:

١:٢٠٠٠٠ ١:٥٠٠٠٠ ١:٨٠٠٠٠ ١:١٠٠٠٠٠

وفي غيرها ١:٢٥٠٠٠ ١:٢٠٠٠٠٠ ١:٥٠٠٠٠٠ ١:١٠٠٠٠٠٠

- في حساب المسافة: على خريطة الوطن العربي انظر المقياس وقم بقياس المسافة على الخريطة بين دمشق وبغداد ثم حول هذه المسافة إلى المسافة الحقيقية بالكلم؟
- في خريطة أوروبا المسافة بين باريس ومدريد هي ١٠٤٠ كلم في حين أن المسافة على الخريطة هي ٥٢ ملم ما هو المقياس المستخدم؟

قياس الزوايا

- ١ راديان = ٥٧,٢٩٥٧٨ درجة = ″٤٥ ′١٧ °٥٧
  - الزاوية الصفر = صفر راديان = صفر درجة
  - الزاوية القاطعة صفر < ز < π
  - الزاوية المسطحة ز = π أو ز = ١٨٠° أو ز = ٢٠٠ غراد
  - الزاوية الداخلة π < ز < ٢ π
  - الزاوية الحادة صفر < ز < $\frac{\pi}{٢}$

ـ الزاوية القائمة ز = $\frac{\pi}{٢}$

  - الزاوية المنفرجة $\frac{\pi}{٢}$ < ز < π

- مجموع زوايا المثلث: ٢ π راديان = ٦,٢٨٣١٨ راديان = ١٨٠ درجة = ٢٠٠ غراد

١° = $\frac{\pi}{١٨٠}$ راديان = ٠,٠١٧٤٥٣٣ راديان

′١ = $\frac{°١}{٦٠}$ = $\frac{\pi}{١٠٨٠٠}$ راديان = ٢,٩٠٩ × ١٠$^{-٤}$ راديان

″١ = $\frac{°١}{٦٠}$ = $\frac{\pi}{٦٤٨٠٠٠}$ راديان = ٤,٨٤٨ × ١٠$^{-٦}$ راديان

● قياس بعض الزوايا المشهورة

راديان	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
درجة	صفر	٣٠	٤٥	٦٠	٩٠	١٢٠	١٥٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
غراد	صفر				١٠٠			٢٠٠		٤٠٠

● قياس الخطوط المثلثية لبعض الزوايا

الزاوية ز	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٤}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π
جيب ز	صفر	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	صفر
جيب التمام	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	$\frac{-١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	-١
المماس	صفر	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$		$\sqrt{٣}$	-١	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	صفر

الفصل السادس

مختصر صيغ الجبر

- الكسور $$\frac{أ}{ب} + \frac{ج}{ب} = \frac{أ + ج}{ب}$$

$$\frac{أ}{ب} . \frac{ج}{د} = \frac{أ . ج}{ب . د}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب . م}{ب . م} = \frac{أ : د}{ب : د}$$

$$\frac{أ}{ب} : \frac{ج}{د} = \frac{\frac{أ}{ب}}{\frac{ج}{د}} = \frac{أ}{ب} \cdot \frac{د}{ج} = \frac{أ \cdot د}{ب \cdot ج}$$

- عمليات على الأعداد الحقيقية أ × ٠ = ٠؛ أ + ب = ب + أ؛ أ × ب = ب × أ

أ × (ب + ج) = أ × ب + أ × ج

(أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)؛ (أ × ب) × ج = أ × (ب × ج) = أ × ب × ج

(أ + ب) (ج + د) = أ ج + أ د + ب ج + ب د

أ + (ب + ج) = أ + ب +ج

أ - (ب + ج) = أ - ب - ج

- المساواة $أ = ب \Leftrightarrow أ + ج = ب + ج$

$أ = ب \Leftrightarrow أ \times ج = ب \times ج$

- القوى $س^{ن} = س \times س \times س . . . \times س$ (نون مرة)

$$س^{٠} = ١ ، س^{-ن} = \frac{١}{س^{ن}} ، س^{ن} \times س^{م} = س^{ن+م}$$

$$س^{م} : س^{ن} = س^{م-ن} ؛ (س^{ن})^{م} = س^{ن \times م}$$

$$(أ ب ج)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن} \times ج^{ن}$$

$$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$$

- الجذور التربيعية $\sqrt[ن]{أ} = ب \Leftrightarrow ب^{ن} = أ$ شرط $ن > ٠$

$$\left(\sqrt[ن]{أ}\right)^{ن} = \sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ ؛ \sqrt[ن]{أ^{م}} = أ^{\frac{م}{ن}}$$

$$\sqrt[م ن]{أ^{م د}} = \sqrt[ن]{أ^{د}}$$

$$\sqrt[ن]{أ ب ج} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} \times \sqrt[ن]{ج}$$

$$\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} ؛ \left(\sqrt[ن]{أ}\right)^{م} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$$

- الحواصل المشهورة $(أ \pm ب)^{٢} = أ^{٢} \pm ٢ أ ب + ب^{٢}$

$$(أ \pm ب)^{٣} = أ^{٣} \pm ٣ أ^{٢} ب + ٣ أ ب^{٢} \pm ب^{٣}$$

$$أ^{٢} - ب^{٢} = (أ + ب) (أ - ب)$$

$$أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب) (أ^{٢} + أ ب + ب^{٢})$$

$$أ^{٣} + ب^{٣} = (أحـ ب) (أ^{٢} - أ ب + ب^{٢})$$

$$أ \times ب \times ج = ٠ \Leftrightarrow أ = ٠ \text{ أو } ب = ٠ \text{ أو } ج = ٠$$

- معادلة الدرجة الثانية: أ س^{٢} + ب س + ج = ٠

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ ج}}}{٢\,\text{أ}} \text{ ؛ } \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ ج}$$

- المتباينات أ > ب ⇔ أ + ج > ب + ج

أ > ب ⇔ −أ < −ب

أ > ب ⇔ أ × ج > ب × ج حيث ج > ٠

أ > ب ⇔ أ × ج < ب × ج حيث ج < ٠

- معادلات بعض المنحنيات في المستوى في الإحداثيات الديكارتية.
- معادلة الخط المستقيم ص = أ س + ب أو أ س + ب ص + ج = ٠
- معادلة المحور السيني ص = ٠
- معادلة المحور الصادي س = ٠
- معادلة القطع المكافىء ص = أ س^{٢} + ب س + ج

$$\text{إحداثيات قمة المكافىء س} = \frac{-\text{ب}}{٢\,\text{أ}} \text{ ؛ ص} = \frac{-\Delta}{٤\,\text{أ}}$$

- اللوغاريتمات العشرية: لغ ن = س ⇔ ١٠$^{\text{س}}$ = ن

لغ (أ × ب × ج) = لغ أ + لغ ب + لغ ج

$$\text{لغ} \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{لغ أ} - \text{لغ ب}$$

لغ أ$^{\text{ن}}$ = ن لغ أ

لغ أ = لغ ب ⇔ أ > ٠ ب > ٠ أ = ب

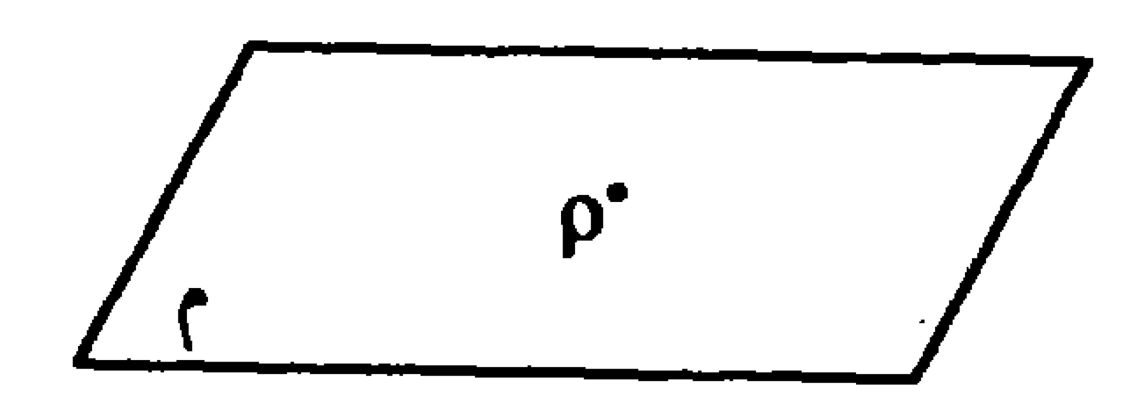
- لوغاريتمات الأساس أ مع (أ > ٠، أ ≠ ١)

لغ$_{\text{أ}}$ ن = س ⇔ أ$^{\text{س}}$ = ن

الفصل السابع

في الهندسة المستوية

ـ المستوى مجموعة، عناصرها نقاط، وهو عبارة عن مساحة مسطحة لا محدودة. إذا كانت لدينا النقطة أ من المستوى (م) كما في الشكل، فإننا نكتب أ ∋ (م)



ـ المستقيم مجموعة جزئية فعلية من المستوى

ـ كل نقطتين تحددان مستقيماً واحداً فقط

ـ على كل مستقيم نستطيع اختيار إتجاهين متقابلين. وفي كل من الحالتين نقول إن المستقيم هو متسقيم موجه

ـ القطعة المستقيمة التي طرفاها أ وَ ب هي المجموعة المؤلفة من النقطتين أ و ب والنقاط التي بينهما على المستيقيم [أ ب]
كما يمكننا أن نكتب [ب أ]

أ ب رمز لمستقيم

[أ ب رمز لنصف مستقيم

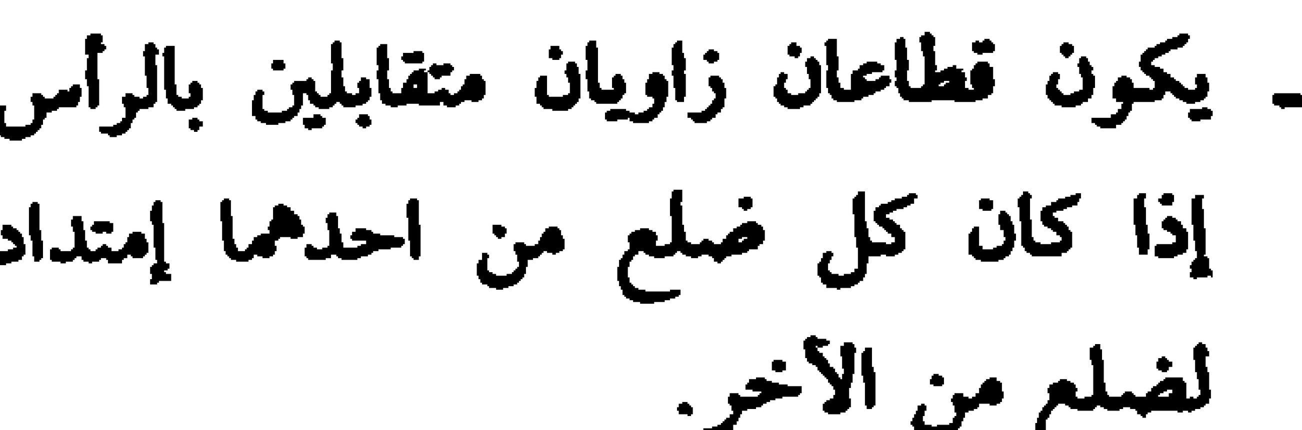
[أ ب] رمز لقطعة مستقيمة

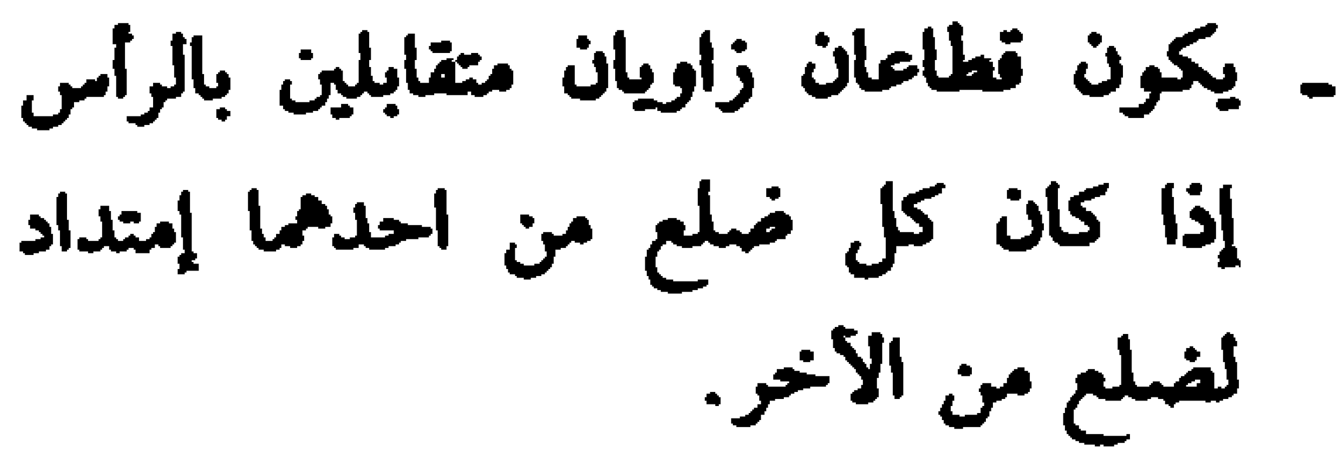
|أ ب| رمز لطول قطعة مستقيمة.

ـ يكون قطاعان زاويّان متجاورين إذا كان

لهما الرأس نفسه وضلع مشترك وكانا على جهتي الضلع المشترك.

- يكون قطاعان زاويان متقابلين بالرأس إذا كان كل ضلع من احدهما إمتداد لضلع من الآخر.



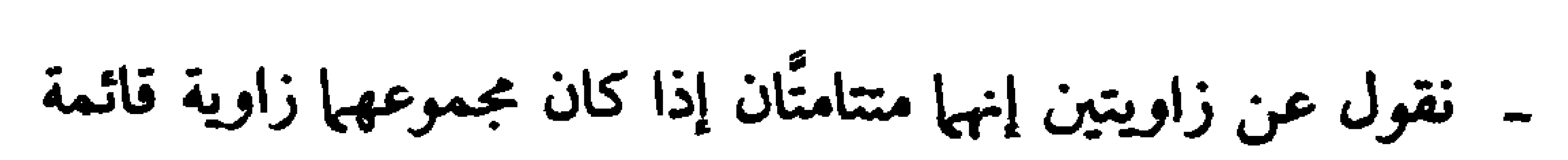


- الدرجة وحدة قياس الزوايا، ورمزها (°)
  الدرجة جزء من ٣٦٠ من الدائرة

إذا قسمنا الدرجة إلى ٦٠ جزء نحصل على الدقيقة ونرمز لها (′)
إذا قسمنا الدقيقة إلى ٦٠ جزء نحصل على الثانية ونرمز لها (″)

- أنواع الزوايا:
  الزاوية الحادة تكون أصغر من ٩٠°
  الزاوية القائمة وتعادل ٩٠°
  الزاوية المنفرجة وتكون بين ٩٠° و ١٨٠°
  الزاوية المستقيمة وتعادل ١٨٠°
  الزاوية الملآنة وتعادل ٣٦٠°

- نقول عن زاويتين إنهما متتامتّان إذا كان مجموعهما زاوية قائمة
- نقول عن زاويتين إنهما متكاملتان إذا كان مجموعهما زاوية مستقيمة

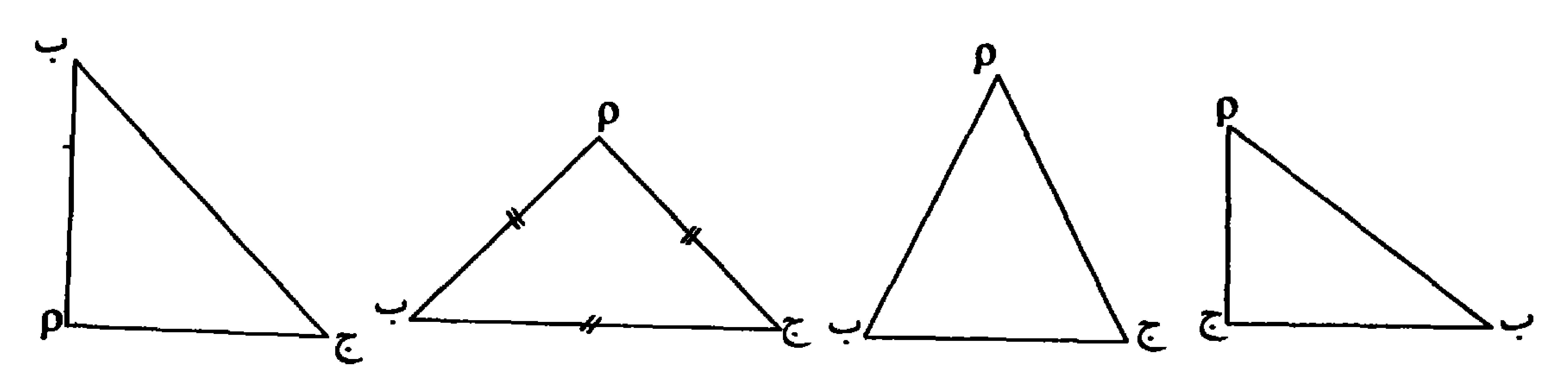


- الزوايا المتممة لزاوية واحدة متساوية

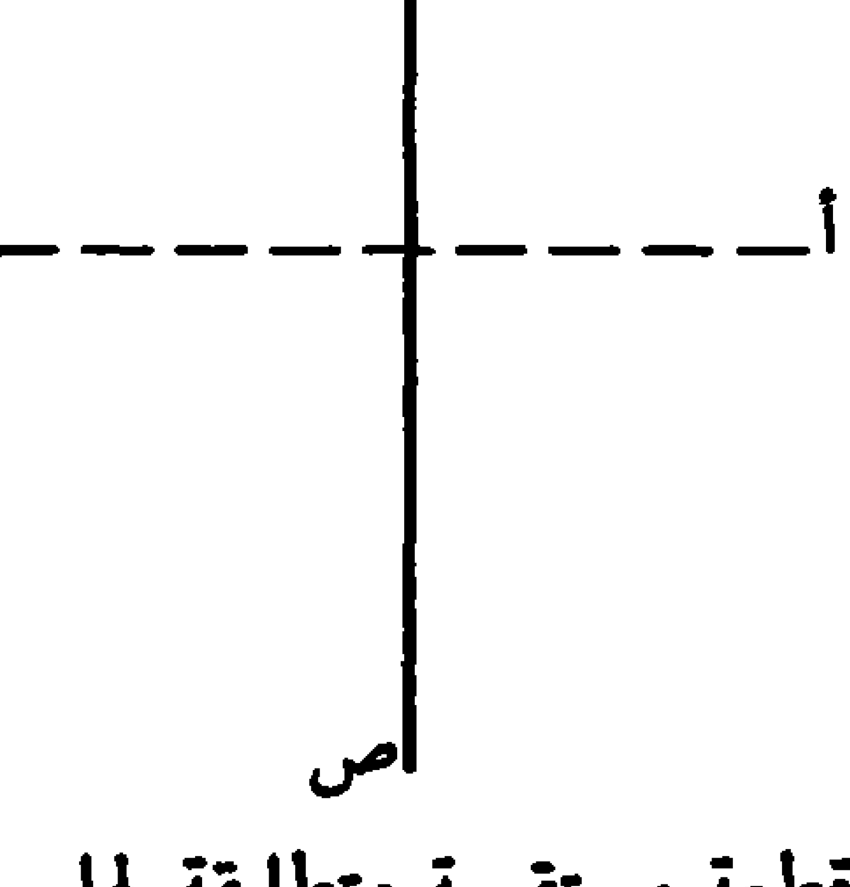
- والزوايا المكملة لزاوية واحدة متساوية

- طول خط مضلّع هو مجموع أطوال القطع المستقيمة المؤلفة له. وإذا كان الخط المضلّع مغلقاً، نسمي طوله محيط المضلع.

- المثلث خط مغلق مكوّن من ثلاثة رؤوس وثلاث جهات وثلاث زوايا.



- يسمى كل مثلث له ضلعان متطابقان مثلثاً متطابق الضلعين.
- يسمى كل مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة مثلثاً متطابق الأضلاع.
- نقول عن نقطتين أ وَ ب إنهما متناظران حول المحور س ص إذا شكّل س ص المنصف العمودي للقطعة المستقيمة [أ ب].



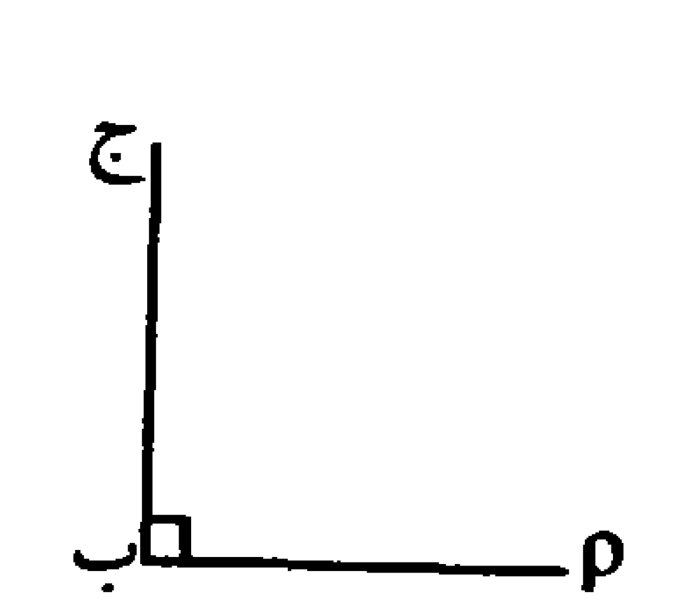
- يحوّل التناظر حول محور كل مستقيم إلى مستقيم.
- يحوّل التناظر حول محور كل قطعة مستقيمة إلى قطعة مستقيمة متطابقة لها.
- يحوّل التناظر حول محور كل قطاع زاوي إلى قطاع زاوي مطابق له.
- التناظر حول محور يحافظ على الطول والاستقامة والشكل والزوايا. والتوازي والتعامد.

المستقيمات المتعامدة

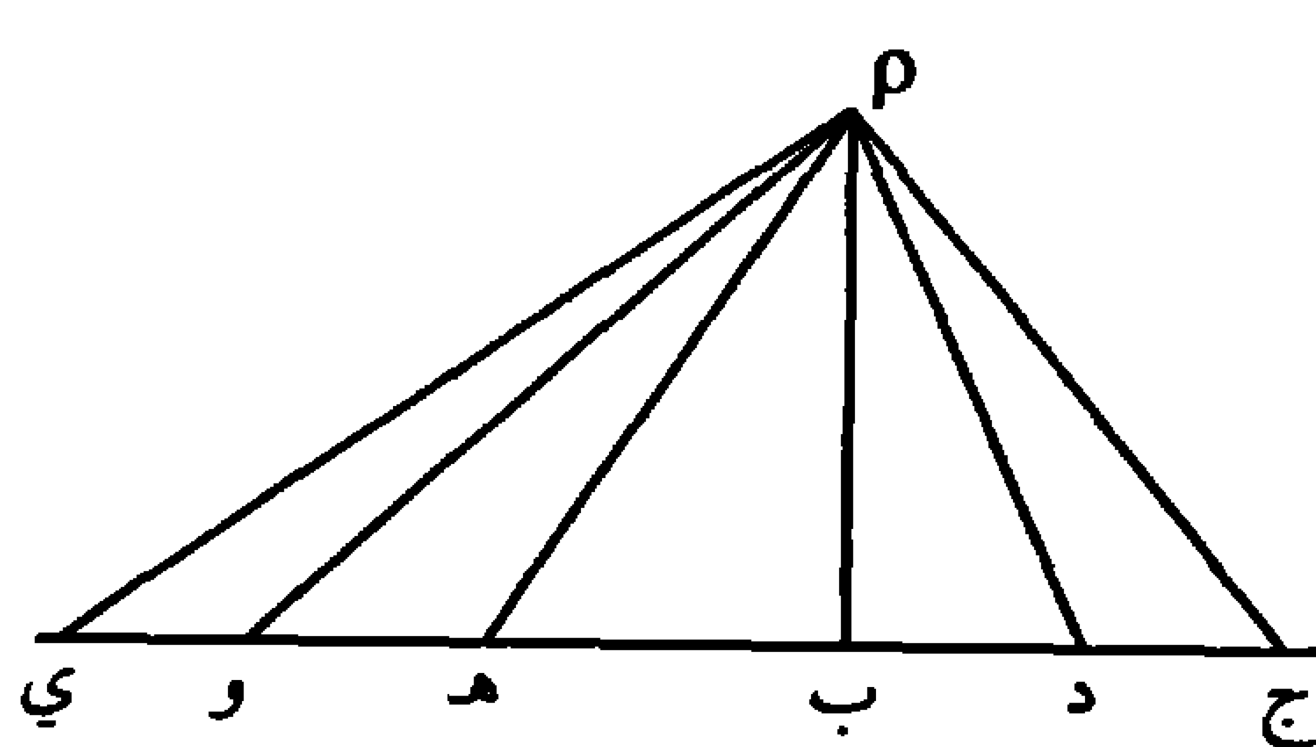
- نقول عن مستقيمن إنهما متعامدان إذا كان كل واحد منهما محور تناظر للآخر.

- تكون القطاعات الزاوية الأربعة على الشكل المقابل قطاعات قائمة. وبالتالي أن الزوايا الأربع متساوية وكل منها زاوية قائمة.

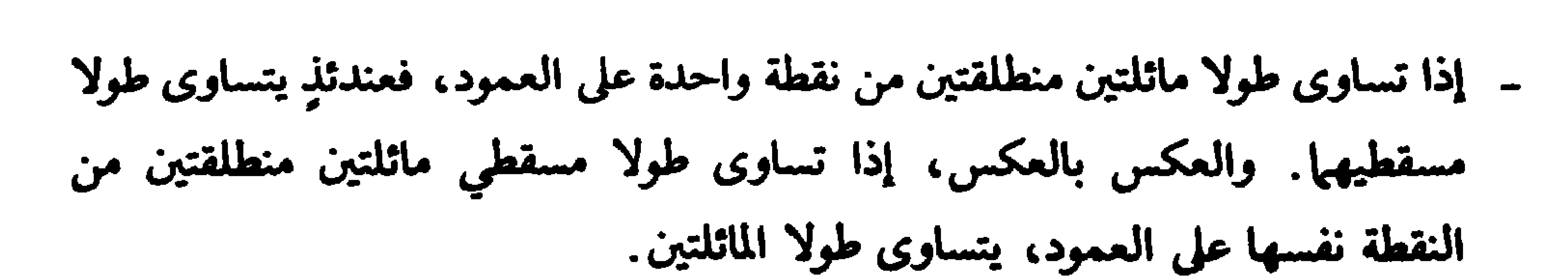
- الزاوية القائمة هي زاوية قطاع زاوي ضلعاه نصفا مستقيمين متعامدين، وتساوي نصف زاوية مستقيمة، أي أن قياسها ٩٠°.



- من نقطة معطاة يمكن إنشاء مستقيم واحد فقط عمودياً على مستقيم معطى. ونسمي هذا المستقيم العمود على المستقيم المعطى، المار في النقطة المعطاة

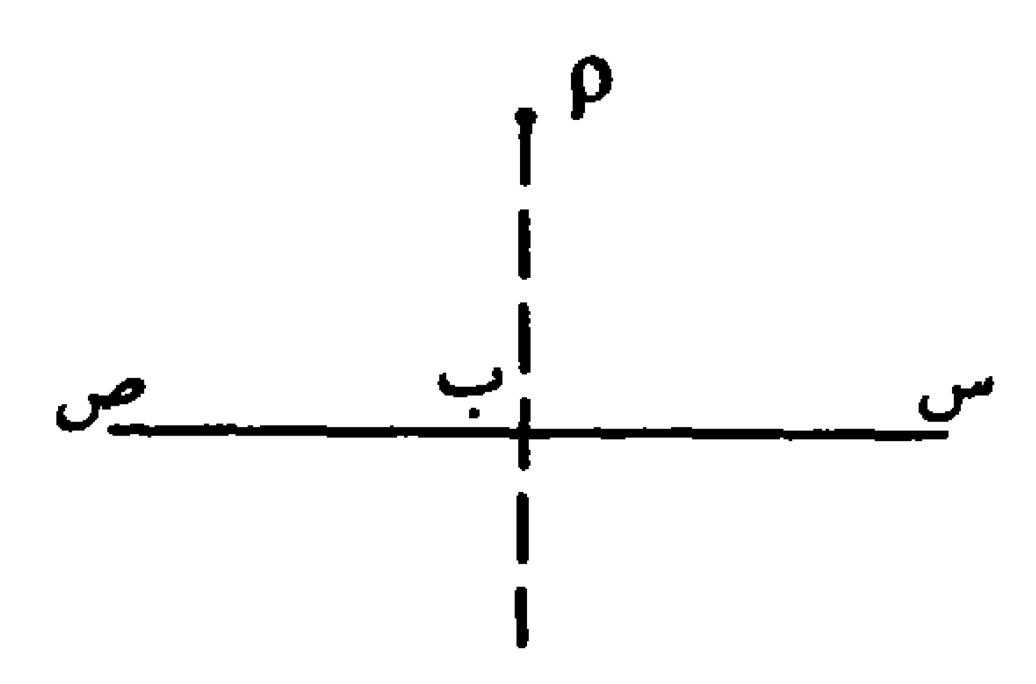


- عندما تنطلق عدة مائلات من نقطة واحدة على العمود، فإن أطوال هذه المائلات تتزايد مع أطوال مساقطها والعكس بالعكس، تتزايد أطوال المساقط بتزايد أطوال المائلات.



- إذا تساوى طولا مائلتين منطلقتين من نقطة واحدة على العمود، فعندئذٍ يتساوى طولا مسقطيهما. والعكس بالعكس، إذا تساوى طولا مسقطي مائلتين منطلقتين من النقطة نفسها على العمود، يتساوى طولا المائلتين.

- المسافة بين نقطة ومستقيم هي طول القطعة التي طرفاها النقطة المعطاة ومسقطها على المستقيم. وتسمّى أيضاً بُعد النقطة عن المستقيم.



المسافة بين نقطة ومستقيم هي أصغر طول قطعة تصل بين النقطة المعطاة ونقطة أخرى على المستقيم.

التوازي

- يقال عن مستقيمين أ ب وس ص، إنهما متوازيان عندما لا يلتقيان أبداً، ونرمز لذلك على الشكل التالي: أ ب //س ص.

شرط أن تكون: أب وس ص في المستوى نفسه.

- كل عمودين على مستقيم واحد متوازيان

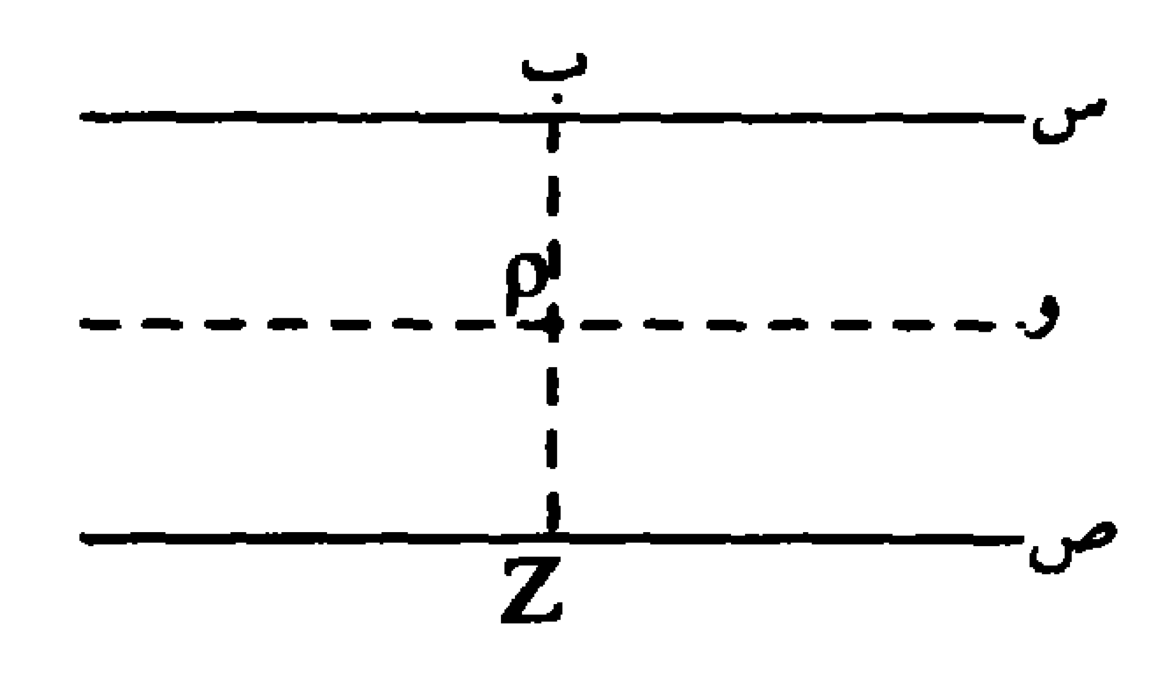
- مسلَّمة إقليدس: من نقطة غير منتمية إلى مستقيم معطى، نستطيع إنشاء مستقيم واحد فقط موازٍ للمستقيم المعطى... أ

- كل مستقيمين مختلفين موازيين لمستقيم ثالث متوازيان

- إذا توازى مستقيان، فكل قاطع لأحدهما قاطع للآخر.

- كل مستقيم عمودي على مستقيم معطى، عمودي كذلك على جميع المسقيات الموازية للمستقيم المعطى.

- المستقيم المتوسط بين مستقيمين متوازيين هو محور التناظر الذي يحوِّل كل مستقيم منهما إلى الآخر.



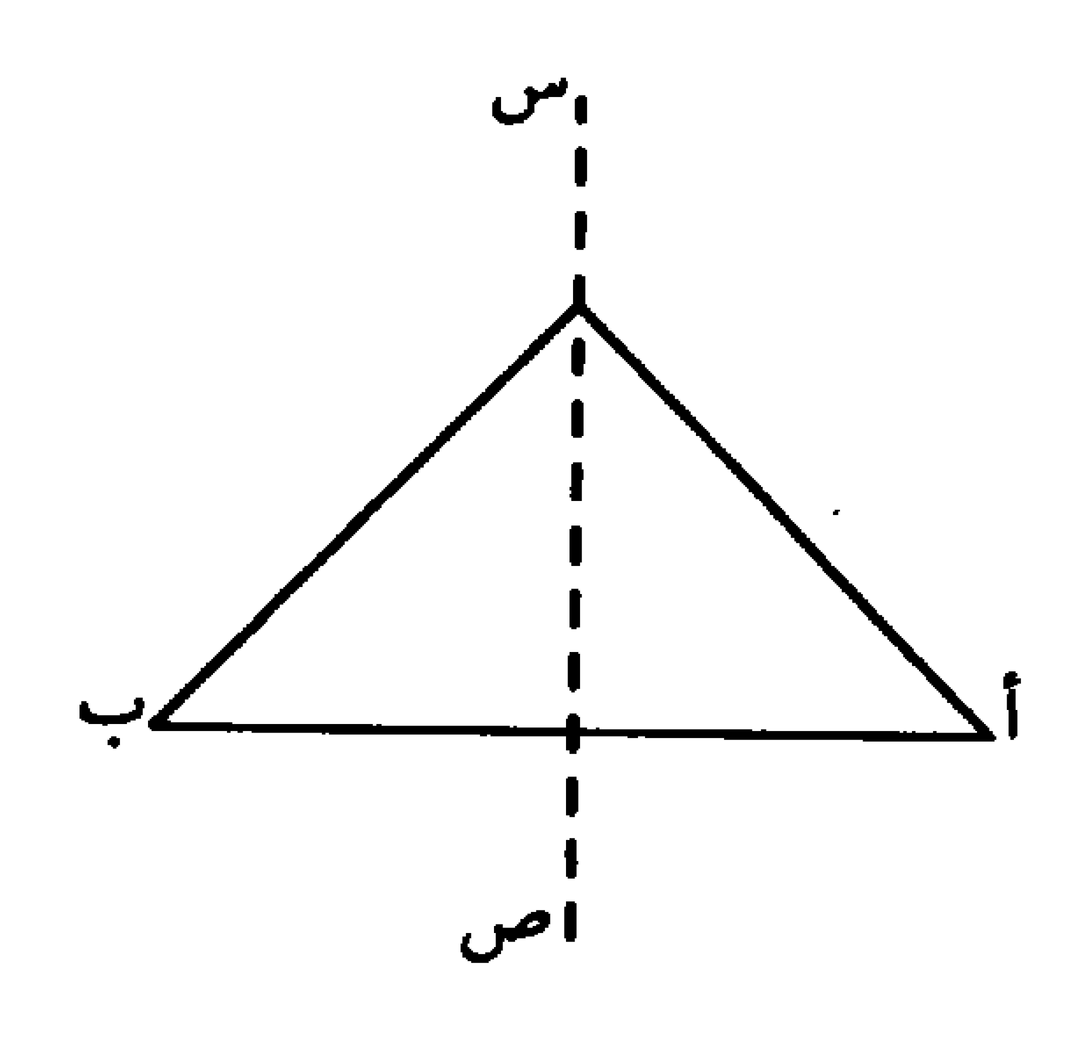
- المستقيم المتوسط بين مستقيمين متوازيين موازٍ لهما.

- كل نقطة من نقاط المستقيم المتوسط بين مستقيمين متوازيين تبعد البعد نفسه عن هذين المستقيمين.

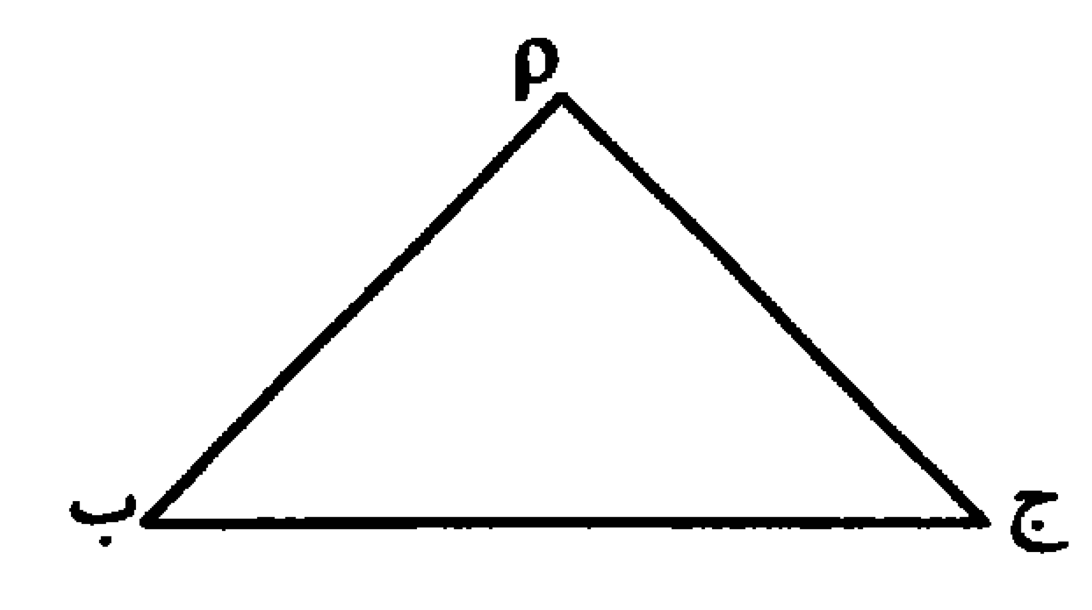
|أب| = |أح|

المنصِّف العمودي

- المنصف العمودي لقطعـة مستقيمة هـو الخط العمودي على القطعة المستقيمة في نقطة نصفها.
- كل نقطة من المنصِّف العمودي لقطعـة مستقيمـة تبعد البعـد نفسه عن طـرفي القطعة. |سہ أ| = |سہ ب|



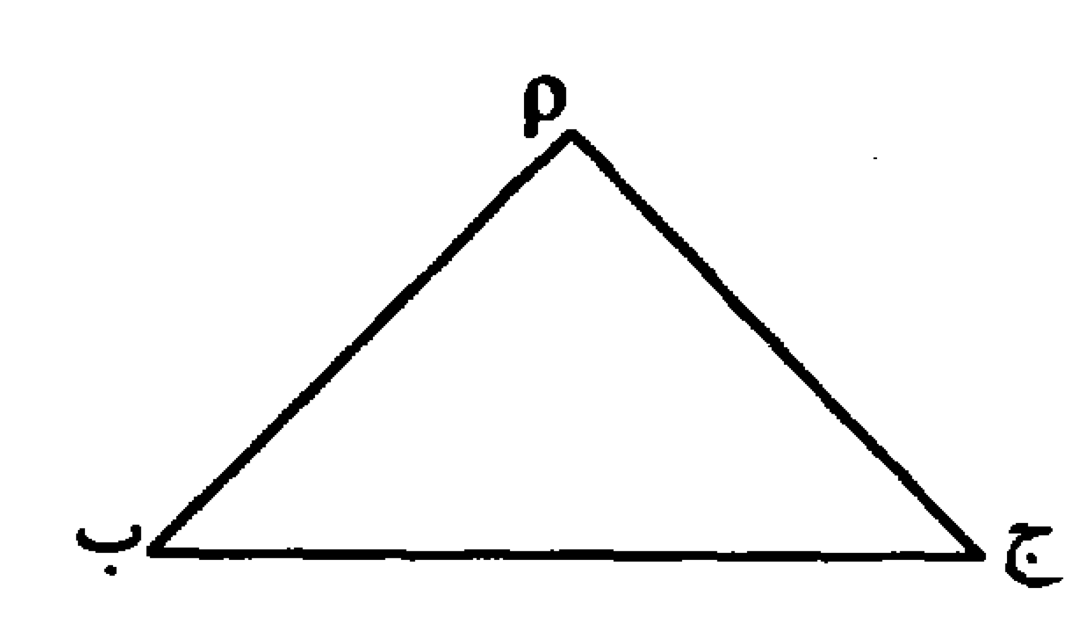
- كل نقطة تبعد البعد نفسه عن طرفي قطعة مستقيمة تنتمي إلى المنصف العمود لهذه القطعة.
- المنصِّف العمودي لقطعة مستقيمة هو مجموعة النقاط من المستوى التي تبعد البعد نفسه عن طرفي القطعة.
- في مثلث متـطابق الضلعين القـطاعـان الزاويان المواجهان للضلعين المتطابقين، متطابقان: معنا |أ ب| = |أ ج|. إذاً أ ب ج = أ ب ج .



- إذا تطابق قطاعان زاويان في مثلث، يتطابق الضلعان المواجهان لهما، وكان المثلث متطابق الضلعين.

ـ في مثلث متطابق الأضلاع جميع القطاعات الزاوية الداخلية متطابقة.

أب ج = ب ج أ = ٦٠°.



ـ إذا تطابقت القطاعات الزاوية الداخلية في مثلث، تطابقت أضلاعه، وكان المثلث متطابق الأضلاع.

ـ المنصِّف العمودي سس ص لقطعة مستقيمة [أ ب] يجزِّىء المستوى إلى نصفي مستوى (م١) و(م٢)، بحيث إذا كان: أ ∈ (م١)، ب ∈ (م٢)، فإن لنقطة ك من المستوى أحد الأوضاع الثلاثة التالية:

١ ـ ك ∈ سس ص يكافئه: |ك أ| = |ك ب|

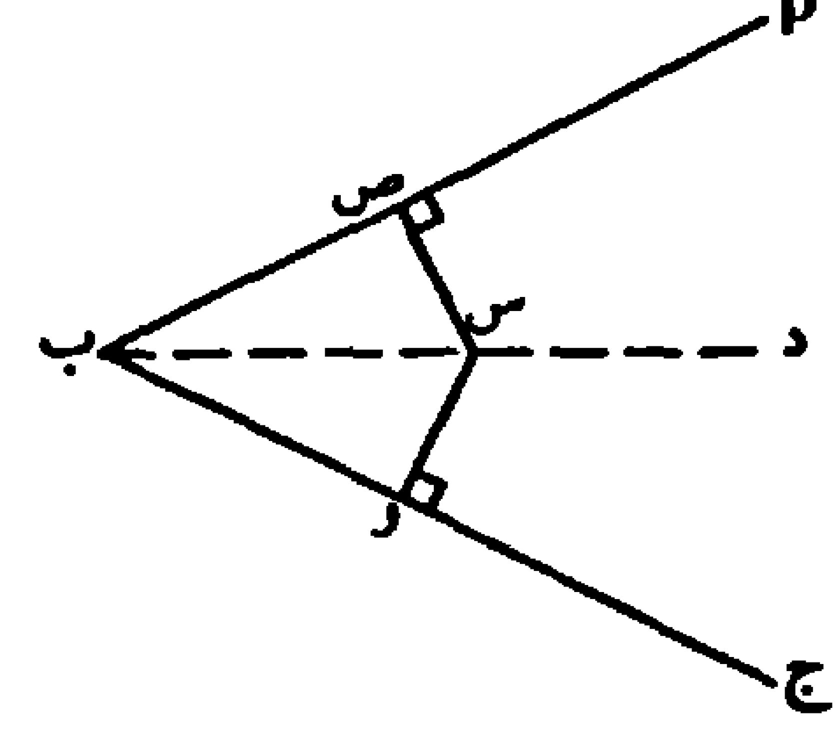
٢ ـ ك ∉ س ص و ك ∈ (م١) يكافئه |ك أ| < |ك ب|

٣ ـ ك ∉ س ص وَك ∈ (م٢) يكافئه |ك أ| > |ك ب|

منصِّف قطاع زاوية

ـ تعريف: منصِّف قطاع زاويّ هو نصف المستقيم الذي يجزىء القطاع إلى قطاعين متطابقين، وهو محور تناظر هذا القطاع الزاوي.

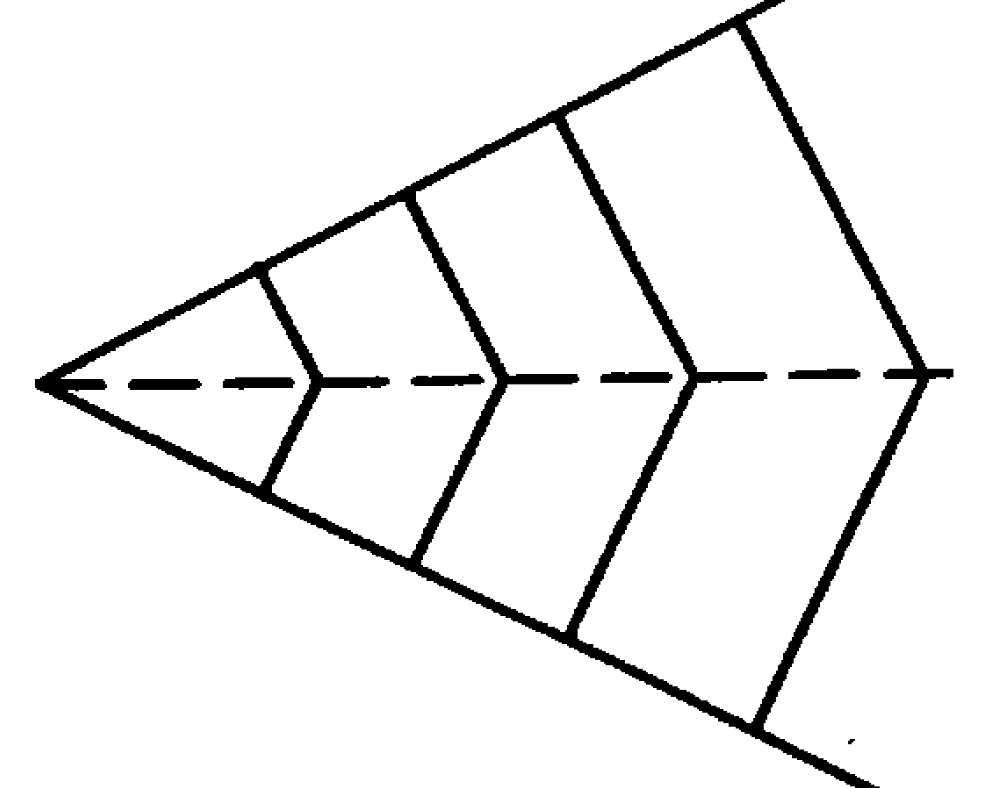
أب د = د ب ج



ـ منصِّف القطاع الزاوي محور تناظر القطاع.

- كل نقطة من نقاط منصّف قطاع زاوي،
تبعد البعد نفسه عن ضلعي هذا القطاع.
|سہ ص| = |س و|

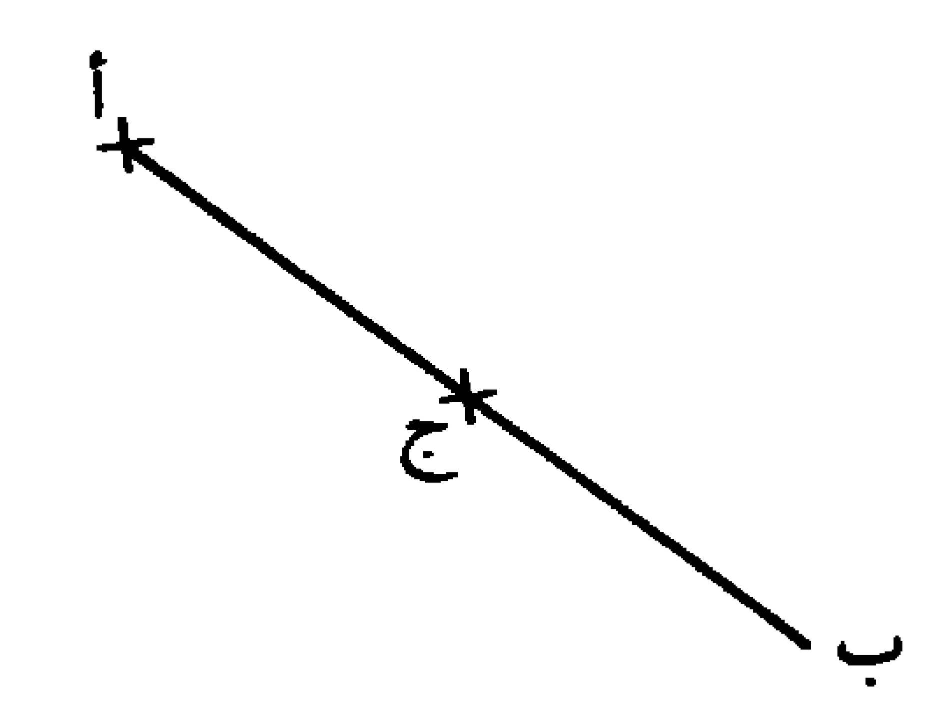
- كل نقطة تبعد البعد نفسه عن ضلعي قطاع زاوي تنتمي إلى منصّف هذا القطاع:
إذا كان |سہ ص| = |سہ و| فإن سہ ∋ ب د



- منصّف قطاع زاوي هو مجموعة النقاط التي تبعد البعد نفسه عن ضلعي القطاع.

التناظر حول نقطة

يمكننا اعتبار التناظر حول نقطة ج في المستوى على أنه تقابل يحوِّل كل نقطة أ من المستوى إلى نقطة ب بحيث تكون ج منتصف القعطة [أ ب].

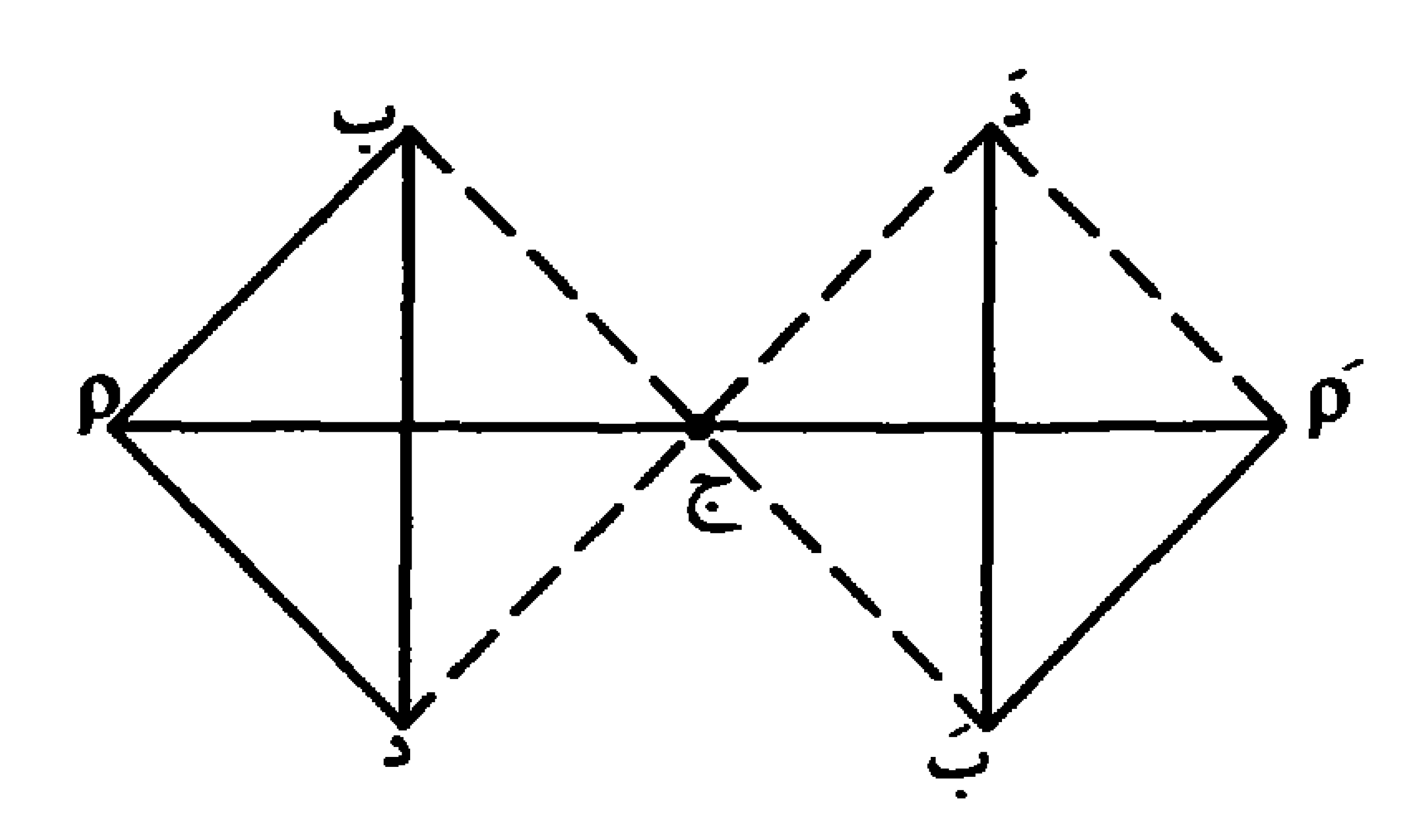


نرمز للتناظر حول نقطة ج بالرمز $ت_ج$ ونسمّي ج مركز التناظر. وكذلك نسمي ب نظير أ بالتناظر $ت_ج$ ونكتب

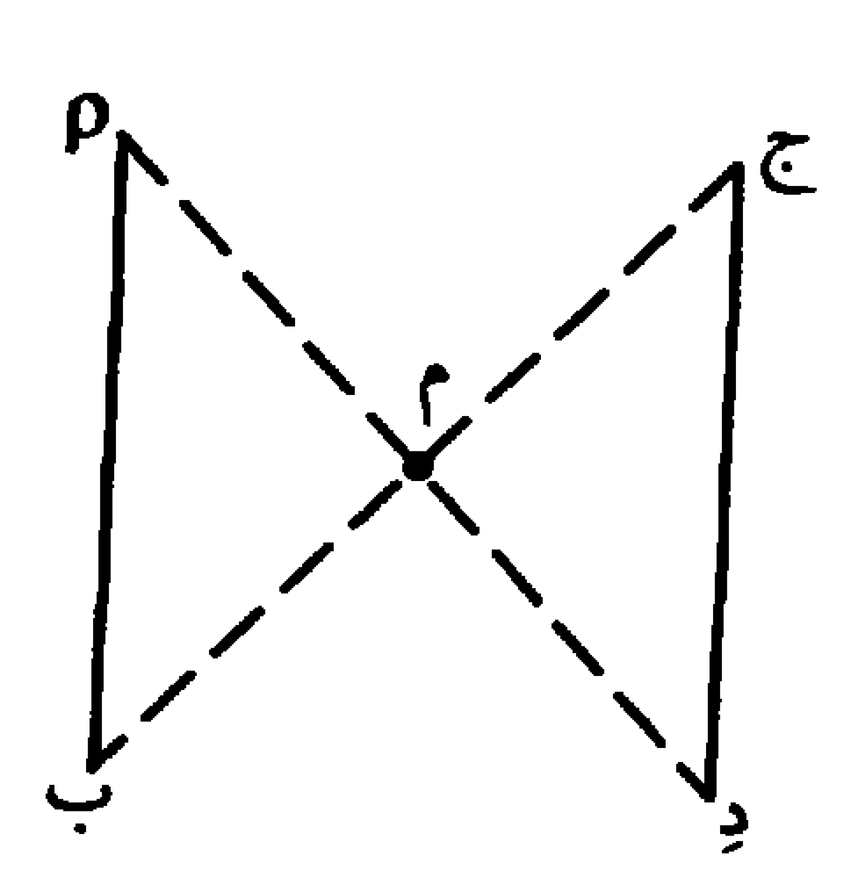
$ت_ج$ (أ) = ب

- يقال عن نقطة ج أنها ثابتة بالتناظر $ت_ج$ عندما لا يتغيَّر موقعها بهذا التناظر. هناك نقطة واحدة ثابتة هي النقطة ج.
- يقال عن شكلين إنهما متناظران حول ج عندما تكون كل نقطة من أحد الشكلين نظير نقطة من الشكل الثاني بالتناظر $ت_ج$.
- تركيب تناظرين حول محورين متعامدين هو تناظر حول نقطة تقاطع المحورين.

أب د = أ ب' د'



- بالتناظر حول ج فإن نظير مستقيم هو المستقيم نفسه إذا كانت ج منتمية إليه.
ومستقيم موازٍ له إذا كانت ج غير منتمية إليه.



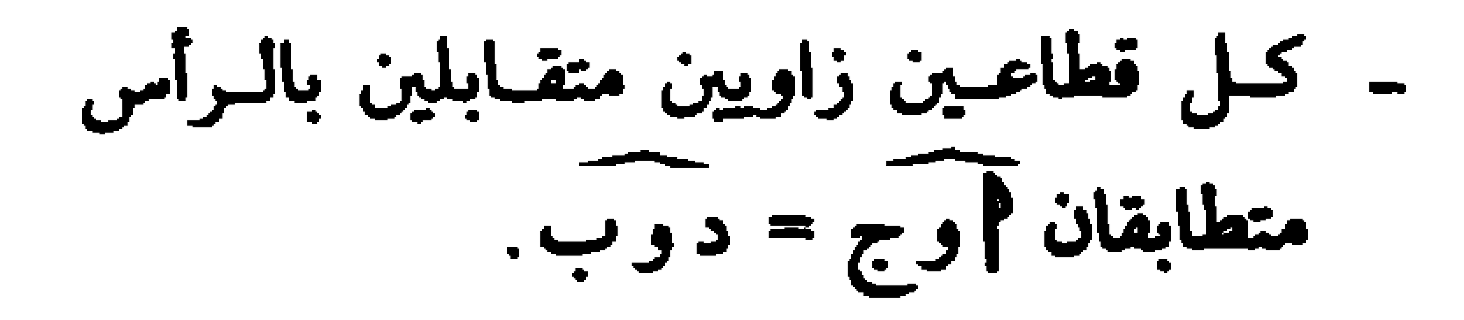
أ ب // ج د

|أ ب| = |ج د|

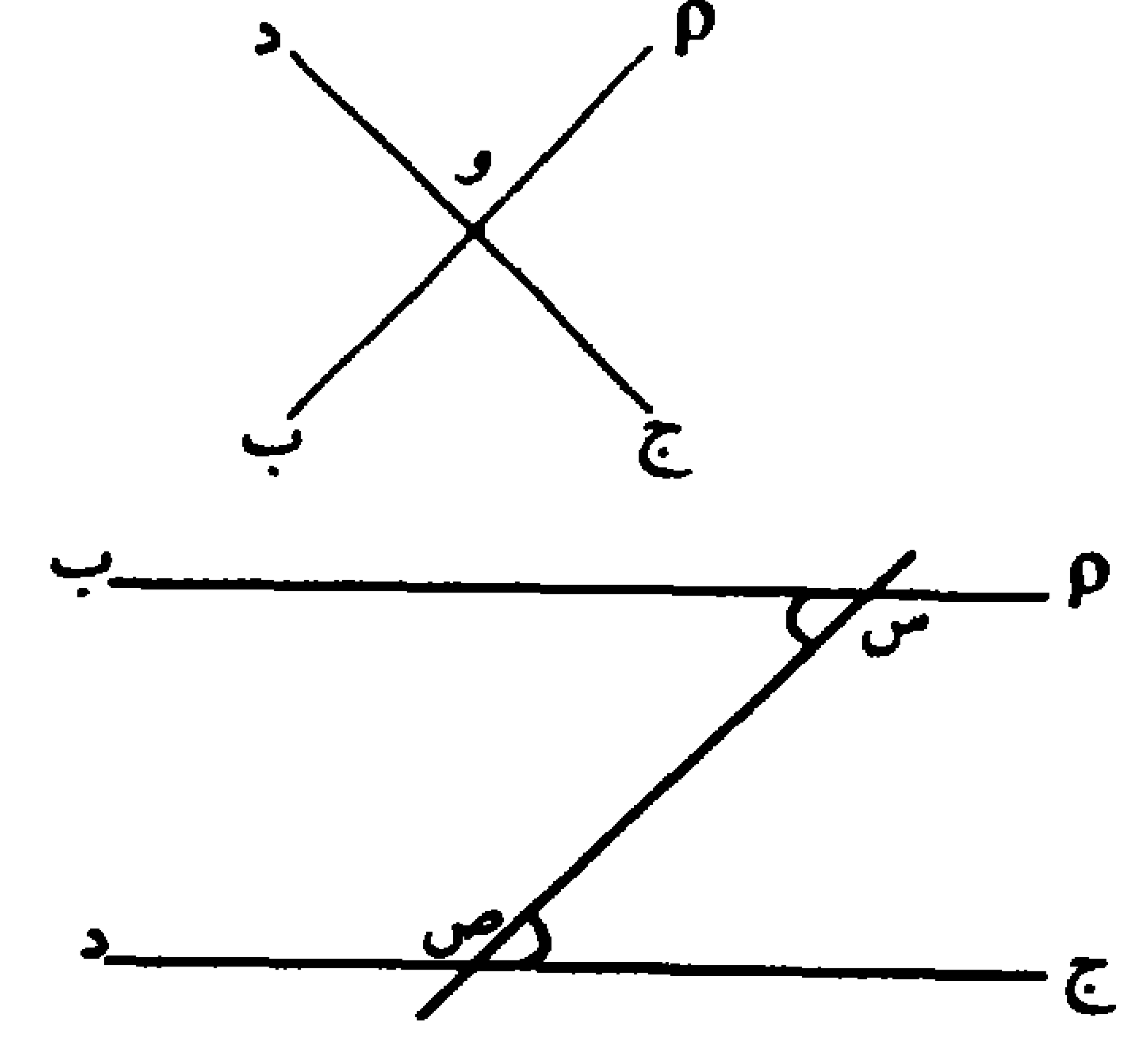
- كل نقطة من نقاط المستقيم المتوسط بين متوازيين هي مركز تناظر للمتوازيين.
- كل مركز تناظر لمستقيمين متوازيين هو نقطة من نقاط المستقيم المتوسط بينهما.
- المستقيم المتوسط بين مستقيمين متوازيين هو مجموعة مراكز تناظر المستقيمين المتوازيين.
- المستقيم المتوسط بين مستقيمين متوازيين هو مجموعة منتصفات القطع المحصورة بين المتوازيين.

حقائق متفرقة

- كل قطاعين زاويين متقابلين بالرأس متطابقان



متطابقان أ و ج = د و ب.



- كل قطاعين زاويين متبادلين داخلياً، ومحددين بمتوازيين وقاطعهما متطابقان:

إذا كان أ ب // ج د

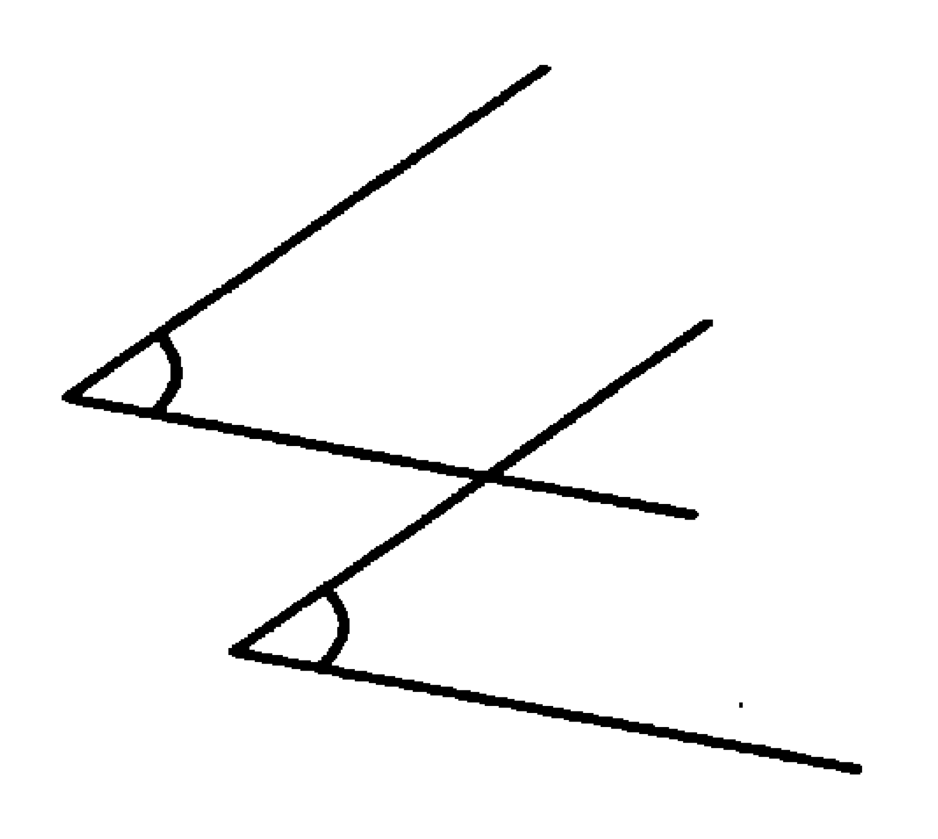
فإن ب س ص = س ص ج.

وكل قطاعين زاويين متقابلين ومحددين بمتوازيين وقاطعهما متطابقان أيضاً.

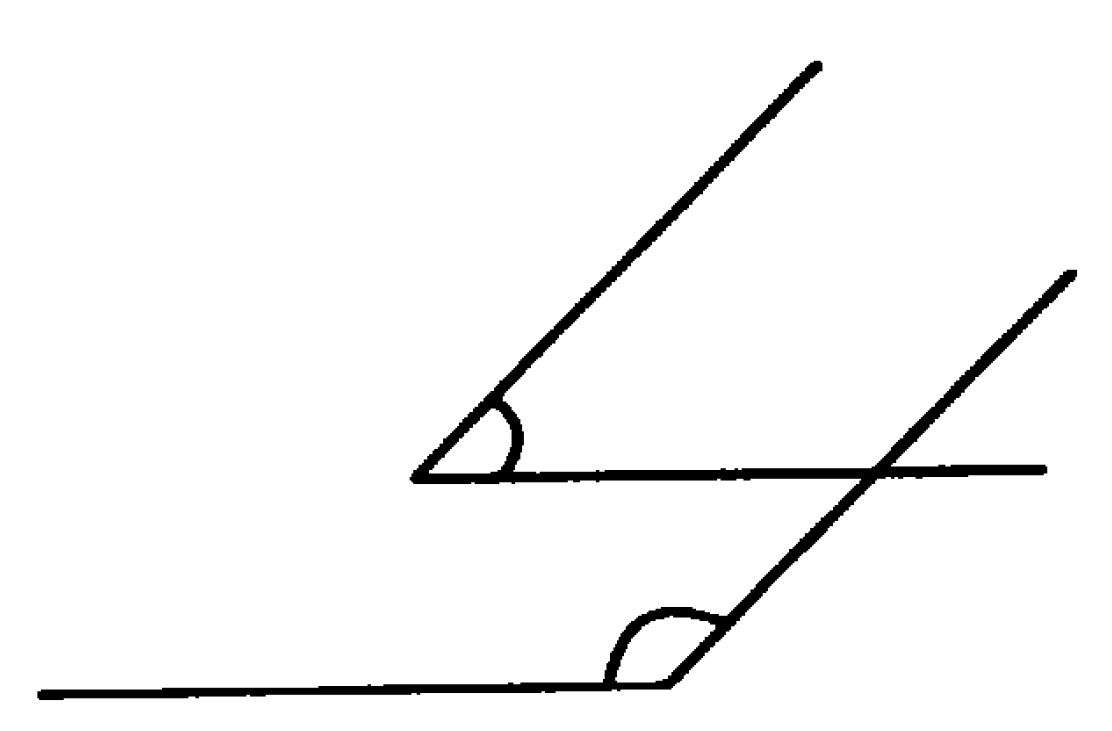
- إذا تطابق قطاعان زاويّان متبادلان داخلياً، فإن الضلعين غير المشتركين لهذين القطاعين جزءان من مستقيمين متوازيين.

إذا كان ب سه ص = سه ص ج

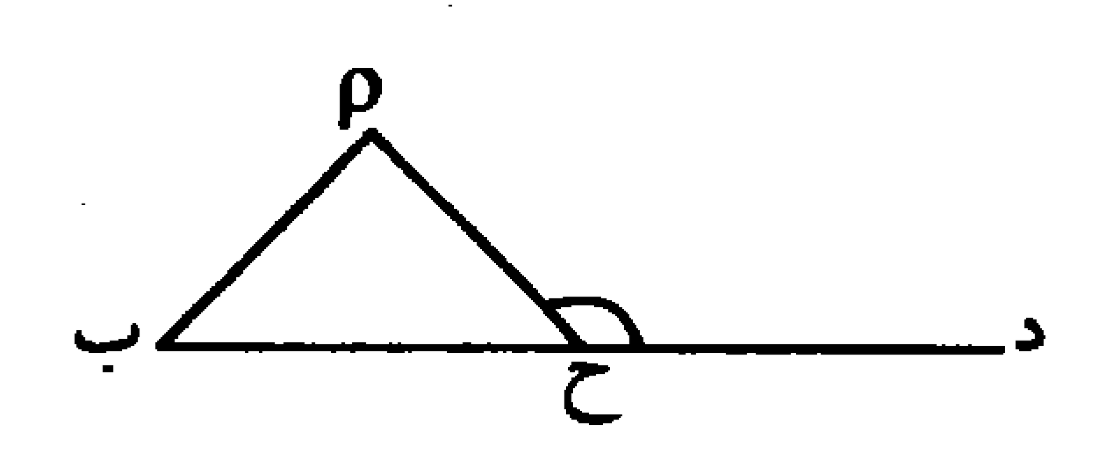
فإن أ ب // ج د



- تتساوى زاويتا قطاعين، أضلاعهما متوازية وفي الاتجاه نفسه؛ وتتكامل هاتان الزاويتان إذا كان لضلع في إحدهما الاتجاه المعاكس للضلع المقابل له في الثاني.



- مجموع زوايا القطاعات الداخلية في مثلث هو ١٨٠°



- زاوية القطاع الخارجي في مثلث تساوي مجموع زاويتي القطاعين الداخليين غير المجاورين للقطاع الخارجي: فإن

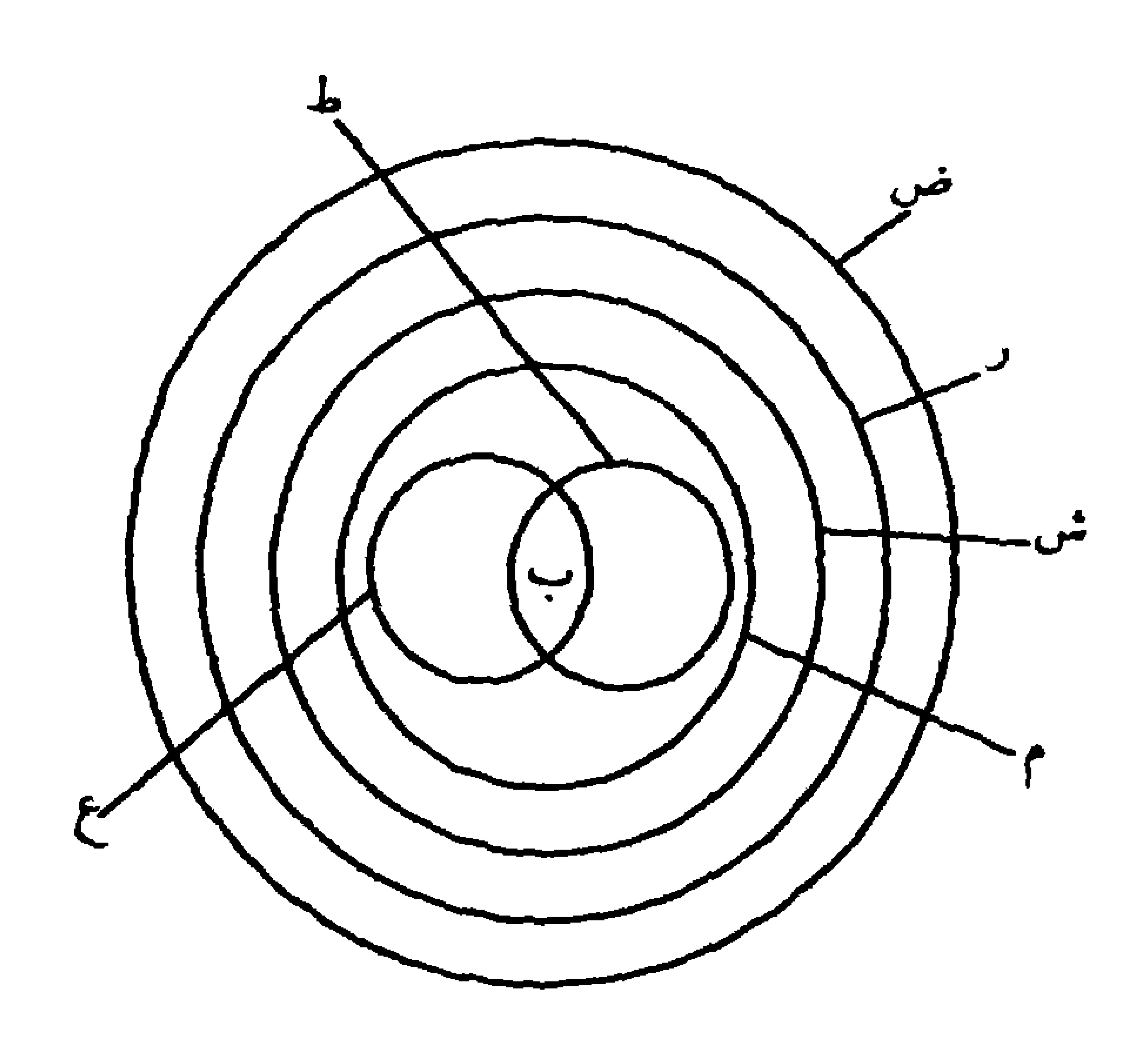


- مجموع زوايا أي شكل رباعي يساوي ٣٦٠°
- مجموع زوايا القطاعات الداخلية لمضلَّع عدد أضلاعه ن يساوي (ن − ٢) × ١٨٠°

الفصل الثامن

الأشكال الهندسية المسطحة

مجموعة المضلعات (ض)
مجموعة الأشكال الرباعية (ر)
مجموعة: شبه المنحرف (ش)
مجموعة: متوازي الأضلاع (م)
مجموعة: المعيَّن (ع)
مجموعة: المستطيل (ط)
مجموعة: المربع (ب)



خصائص الأشكال الرباعية الأساسية

- مجموع زوايا القطاعات الداخلية في أي رباعي هو ٣٦٠°

١ ـ متوازي الأضلاع:

- متوازي الأضلاع هو شكل رباعي، كل ضلعين متواجهين فيه متوازيين:

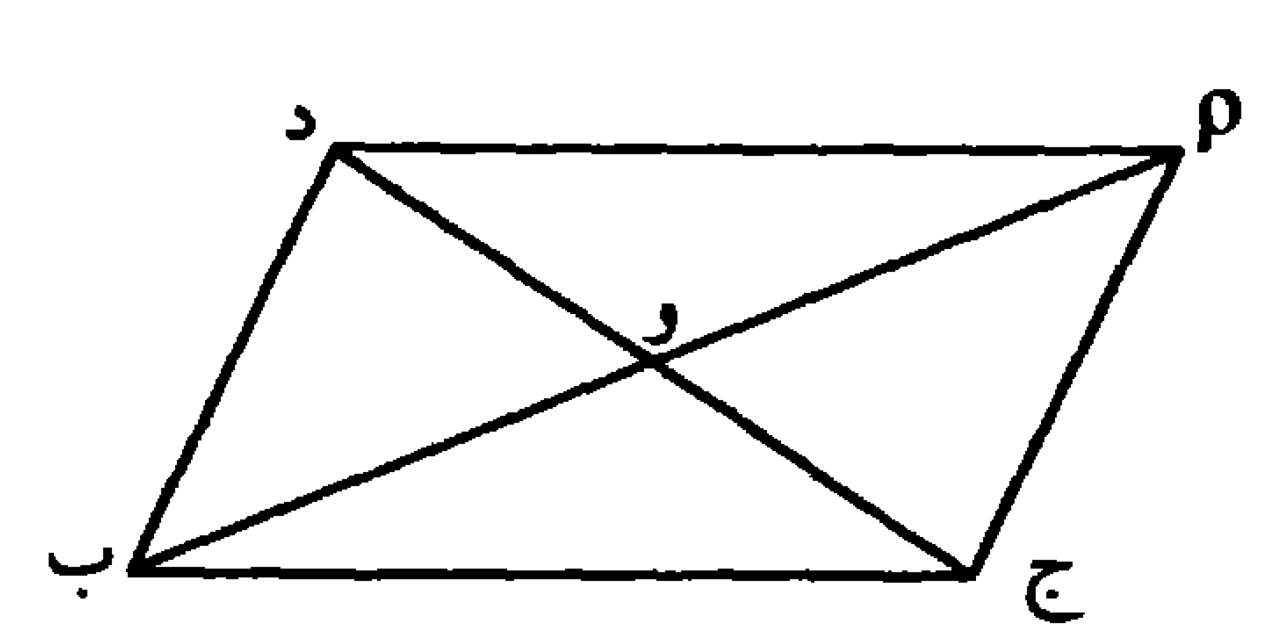
أد // ب ج

أب //د ج

- الأضلاع المتواجهة في متوازي الأضلاع متطابقة والقطاعات الزاوية المتواجهة متطابقة كذلك.

|أب| = |ج د|

|أج| = |ب د|

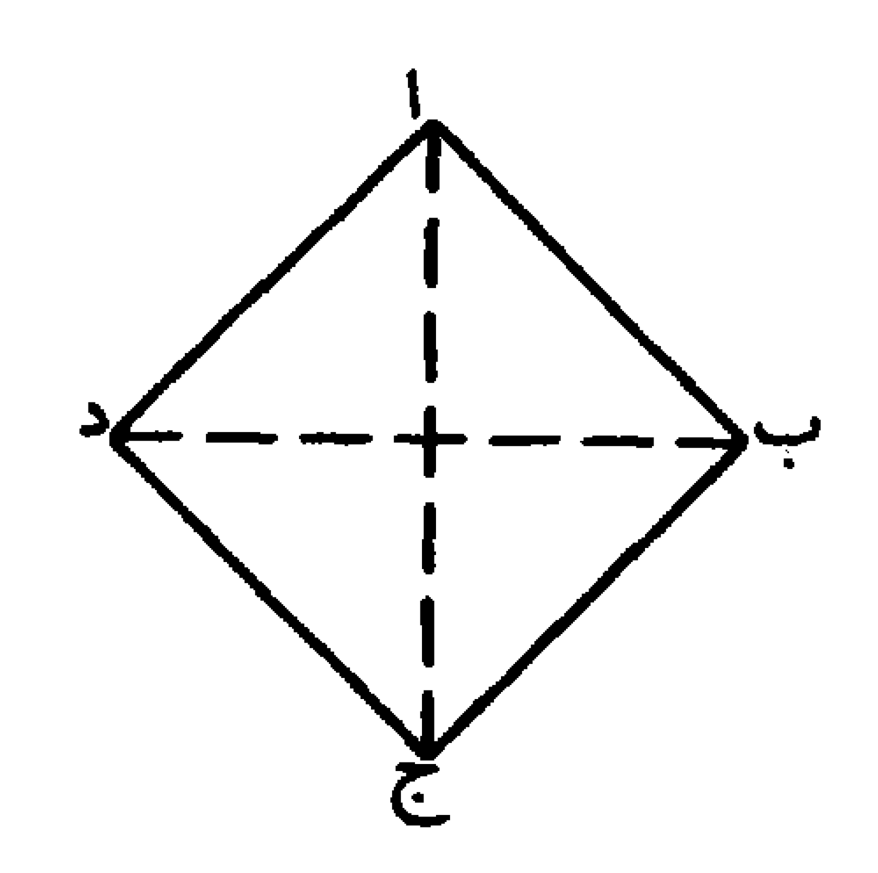


- يتقاطع قطرا متوازي الأضلاع في منتصفهما

|وأ| = |و د|، |وج| = |و ب|.

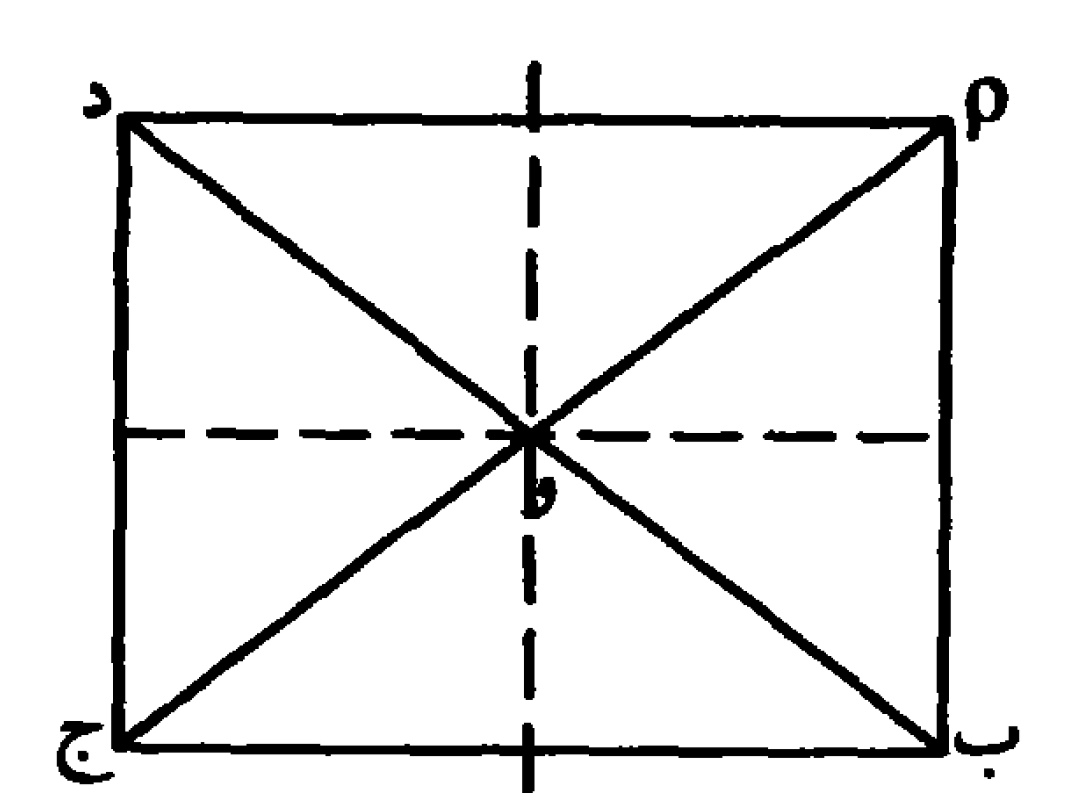
- في متوازي الأضلاع، نقطة تقاطع قطرية هي مركز تناظر له.
- الرباعي الذي تتطابق أضلاعه المتواجهة هو متوازي أضلاع.
- كل رباعي له ضلعان متواجهان متوازيان ومتطابقان هو متوازي أضلاع. إذا كان |أب| = |ج د| وَ أب // ج د فإن أ ب ج د متوازي الأضلاع.
- كل رباعي قطاعاته الزاوية المتواجهة متطابقة هو متوازي أضلاع.
- كل رباعي يتقاطع قطراه في منتصفهما هو متوازي أضلاع.
- كل رباعي له مركز تناظر هو متوازي أضلاع.

٢ ـ المعيَّن:



- المعين شكل رباعي تتطابق جميع أضلاعه.
- المعين متوازي أضلاع تتطابق جميع أضلاعه.
- قطرا المعين متعامدان ومتقاطعان في منتصفهما.
- قطرا المعين هما محورا تناظر له ونقطة تقاطعهما هي مركز تناظره.
- قطرا المعين ينصفان القطاعات الزاوية المتواجهة.
- كل متوازي أضلاع يتعامد قطراه هو معين.
- كل رباعي قطراه متعامدان ومتقاطعان في منتصفهما هو معين.

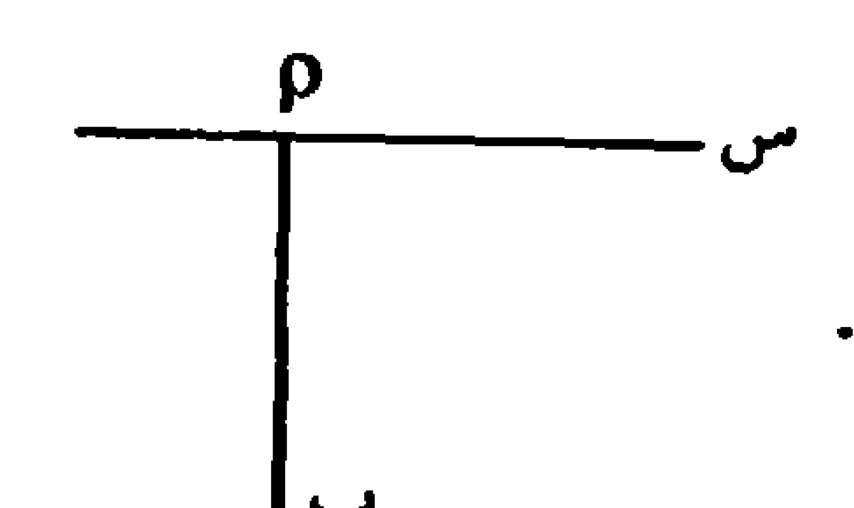
٣ ـ المستطيل:



- المستطيل شكل رباعي جميع قطاعاته الزاوية قائمة.
- المستطيل متوازي أضلاع تتطابق جميع قطاعاته الزاوية.
- كل متوازي أضلاع تصبح إحدى زواياه قائمة يكون مستطيلاً.
- قطرا المستطيل متطابقان.
- المستطيل شكل رباعي له محورا تناظر لا يمران في رؤوس ونقطة تقاطعهما مركز تناظر له.

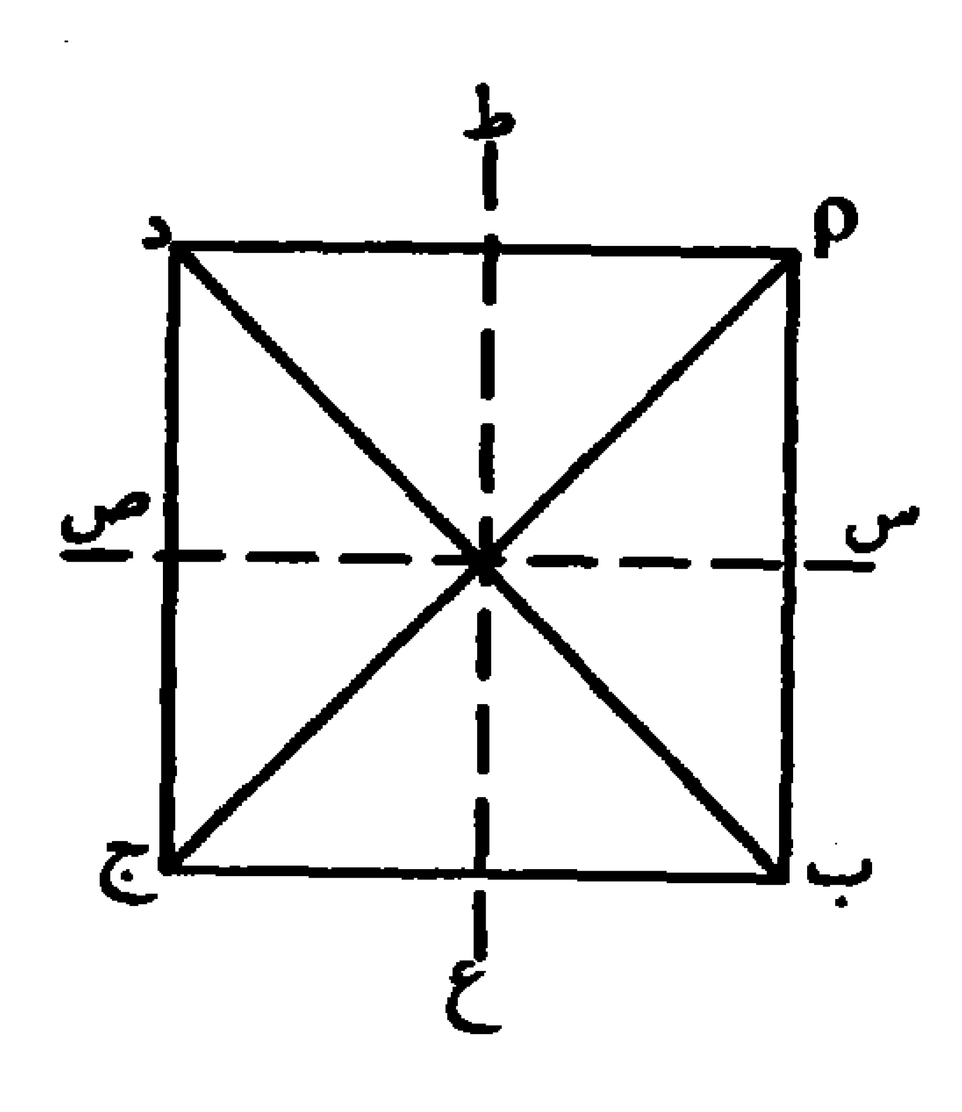
محورا تناظر المستطيل هما المنصفان العموديان للأضلاع المتواجهة.

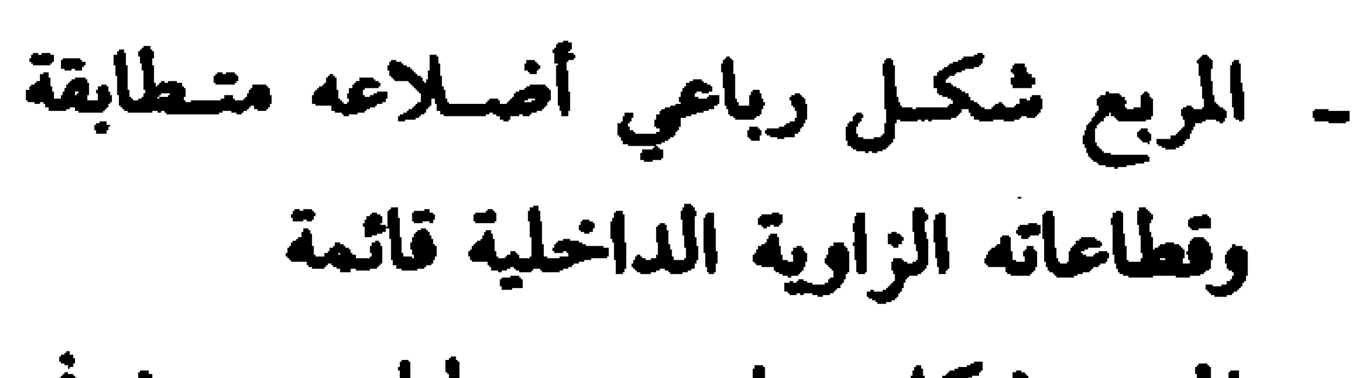
- محورا تناظر المستطيل متعامدان.



- كل متوازي أضلاع، قطراه متطابقان هو مستطيل.
- كل متوازي أضلاع، ذو قطاع زاوي قائم هو مستطيل.
- المسافة بين متوازيين هي طول قطعة عمود على المتوازيين ومحصورة بينهما:
المسافة هي |أ ب|.

٤ ـ المربع





- المربع شكل رباعي أضلاعه متطابقة وقطاعاته الزاوية الداخلية قائمة
- المربع شكل رباعي مستطيل ومعين في آن معاً.
- المربع مستطيل، إذن:

أ ـ له محورا تناظر لا يمران في الرؤوس.

ب ـ قطراه متطابقان.

ج ـ قطاعاته الزاوية الداخلية قائمة.

ـ المربع معين، إذن:

أ ـ قطراه محورا تناظر له.

ب ـ قطراه متعامدان.

ج ـ أضلاعه متطابقة.

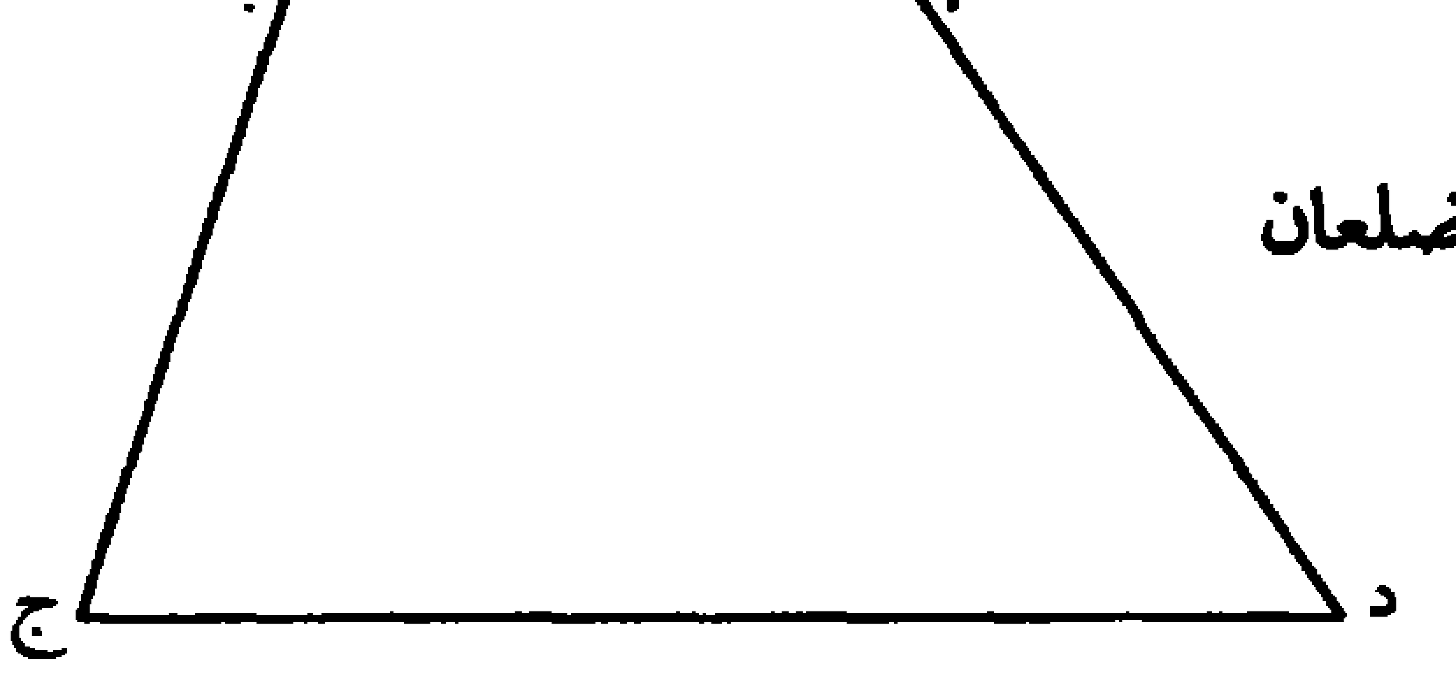
الخصائص المميزة للمربع:

١ـ كل شكل رباعي له أربعة محاور تناظر، اثنان منها يمران في الرؤوس هو مربع.

٢ـ كل شكل رباعي له أربعة أضلاع متطابقة، وقطاع زاوي قائم هو مربع.

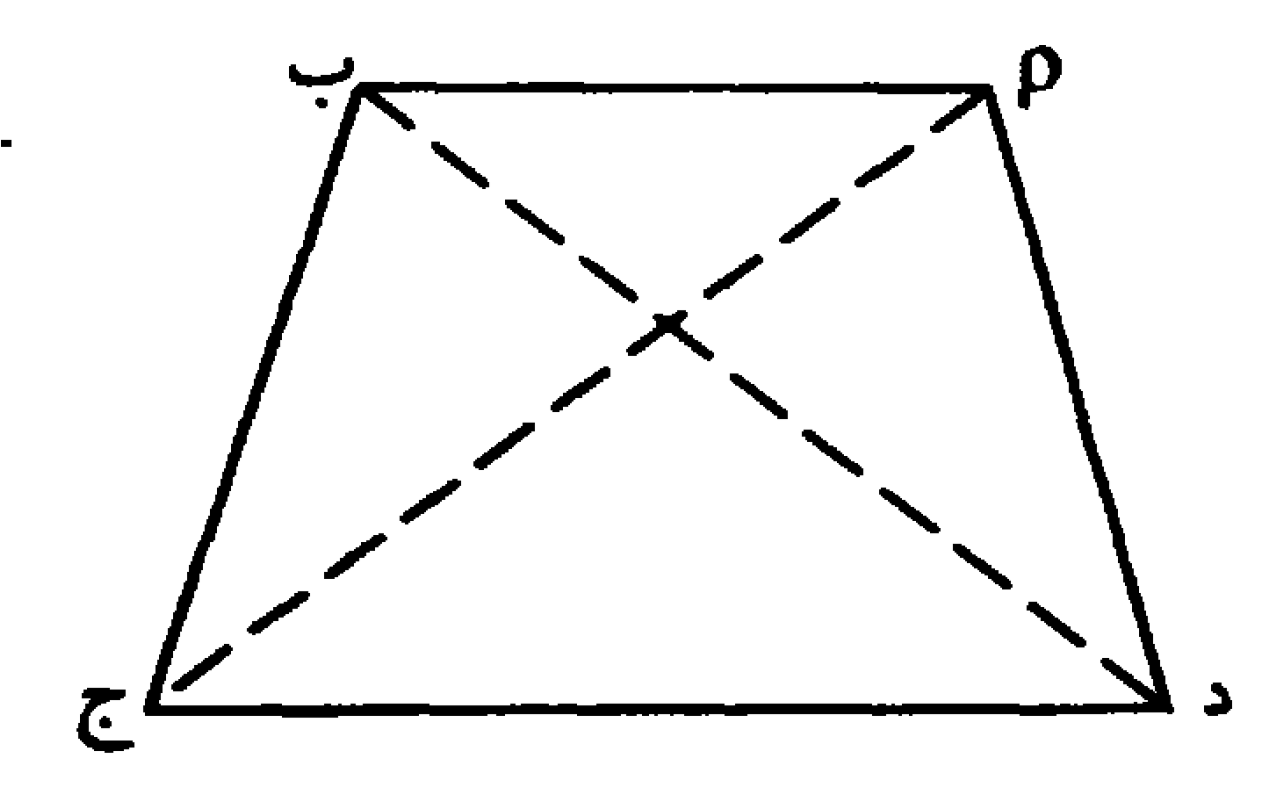
٣ـ كل متوازي أضلاع قطراه متعامدان ومتطابقان هو مربع.

٥ ـ شبه المنحرف:



ـ شبه المنحرف هو شكل رباعي له ضلعان متوازيان.

ـ القطاعان المجاوران لقاعدة واحدة في شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان.

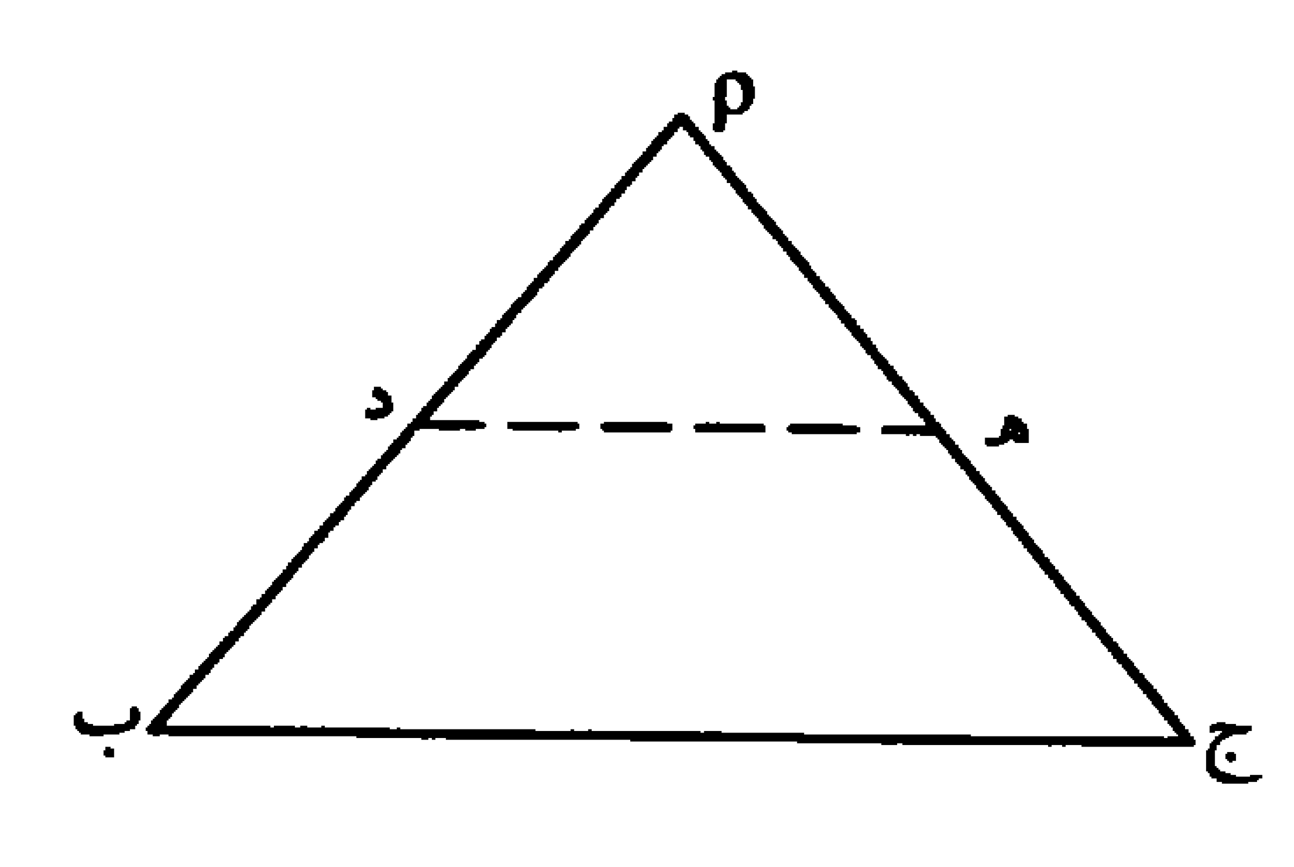


ـ لشبه المنحرف المتطابق الساقين محور تناظر هو المنصف العمودي للقاعدتين.

ـ قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان.

- إذا كان لشبه منحرف قطاعان زاويان مجاوران لقاعدة واحدة متطابقان، يكون شبه المنحرف هذا متطابق الساقين، وله محور تناظر هو العمود المنصف للقاعدتين.

حقائق متفرقة

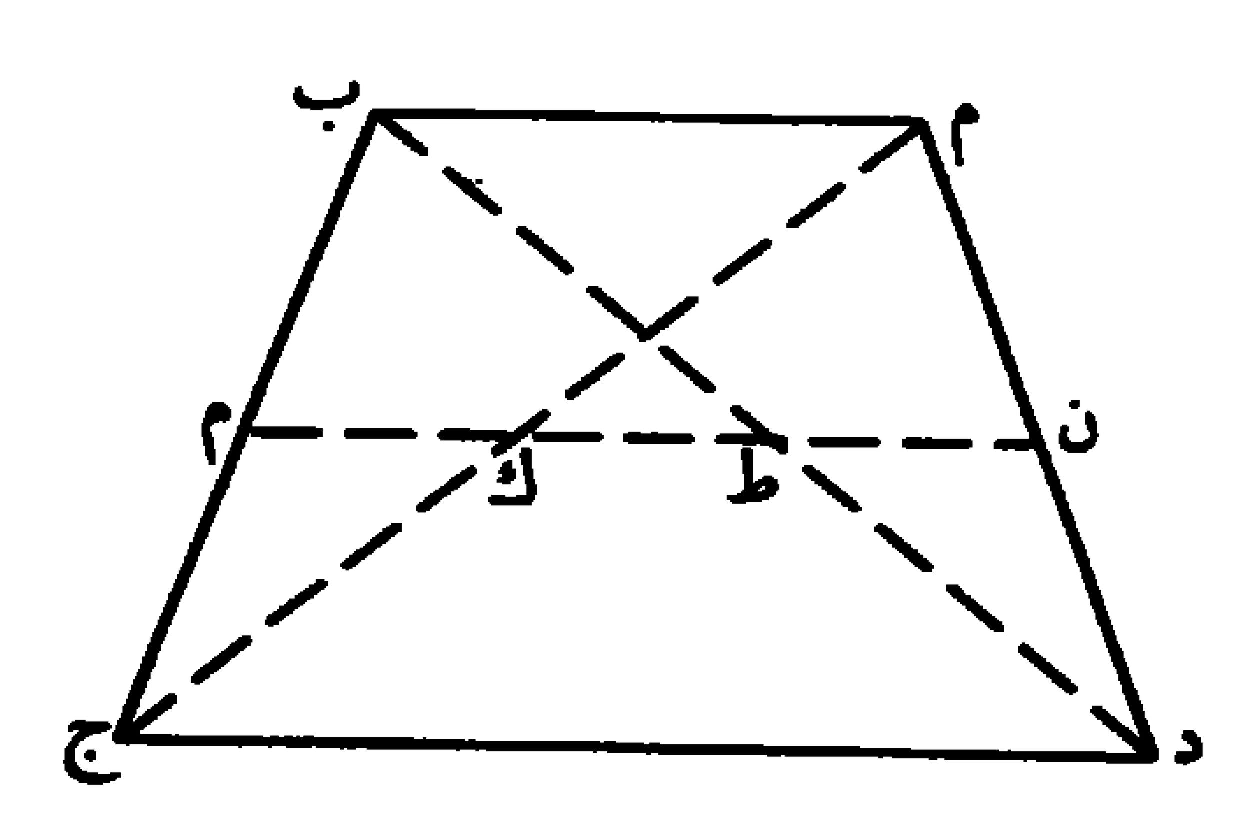


- المستقيم المار في منتصف ضلع من أضلاع مثلث ويوازي ضلعاً ثانياً، ينصف الضلع الثالث.
- قطعة المستقيم التي تصل بين منتصفي ضلعي مثلث تكون موازية للضلع الثالث، وطولها يساوي نصف طوله.

- المستقيم المار في منتصف أحد الضلعين غير المتوازيين في شبه المنحرف، ويوازي احدى القاعدتين، ينصف الضلع الآخر.

- القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين في شبه المنحرف، تكون موازية للقاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولهما.

$$|\text{ن م}| = \frac{|\text{أ ب}| + |\text{د ج}|}{\text{٢}} \text{ ؛ } \text{ط ك} = \frac{\text{د ج} - \text{أ ب}}{\text{٢}}$$



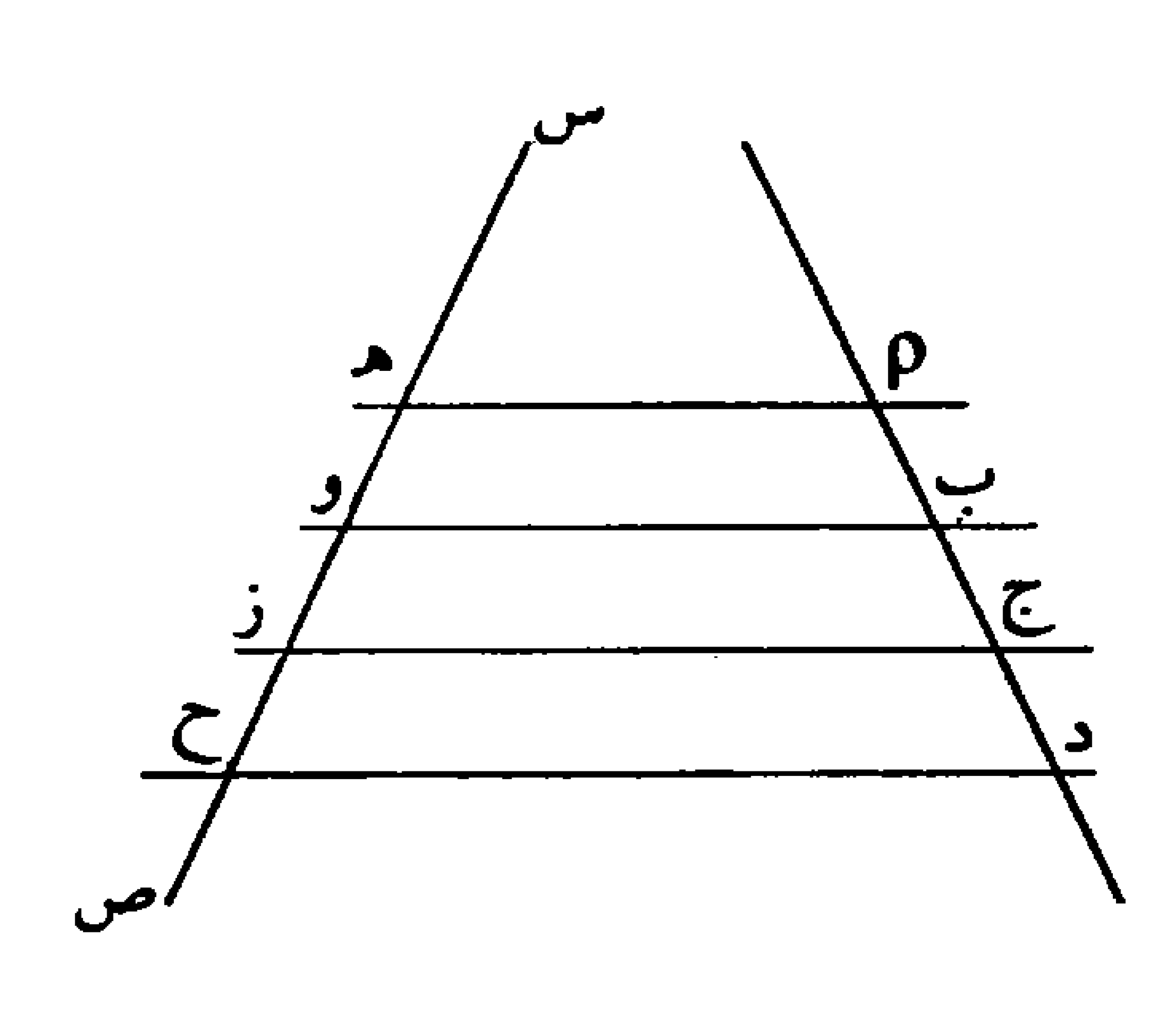
- في شبه المنحرف، منتصفا الضلعين غير المتوازيين، ومنتصفا القطرين على استقامة واحدة.

- إن الخطوط المتوازية التي تقسم الخط القاطع س ص إلى قطع مستقيمة متطابقة تقسم كل خط قاطع آخر إلى قطع مستقيمة متطابقة أيضاً.

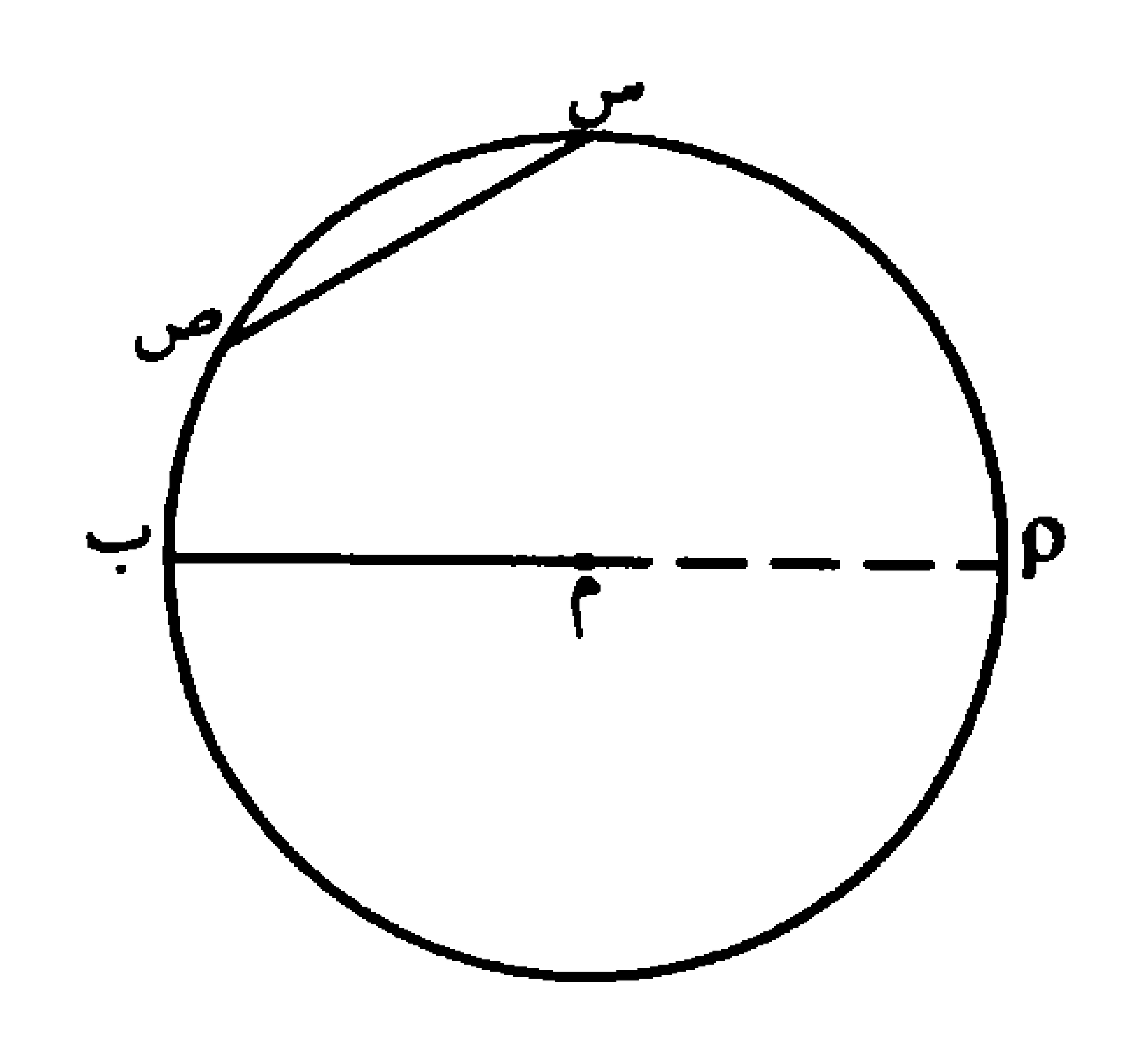
إذا كان معنا: أ هـ // ب و // ج ز // د ح

وَ: |أ هـ و| = |و ز| = |ز ح|

فإن: |أ ب| = |ب ج| = |ج د|.



٦ ـ الدائرة وعناصرها.



م مركز الدائرة

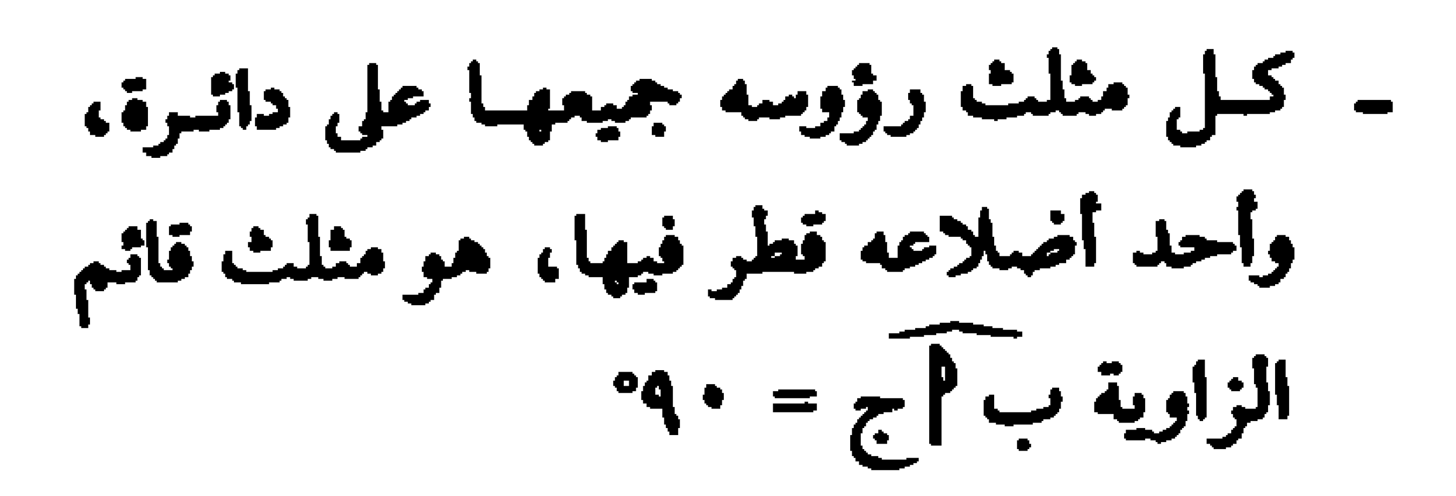
[أ ب] قطر الدائرة

[م أ] نصف قطر الدائرة أو الشعاع

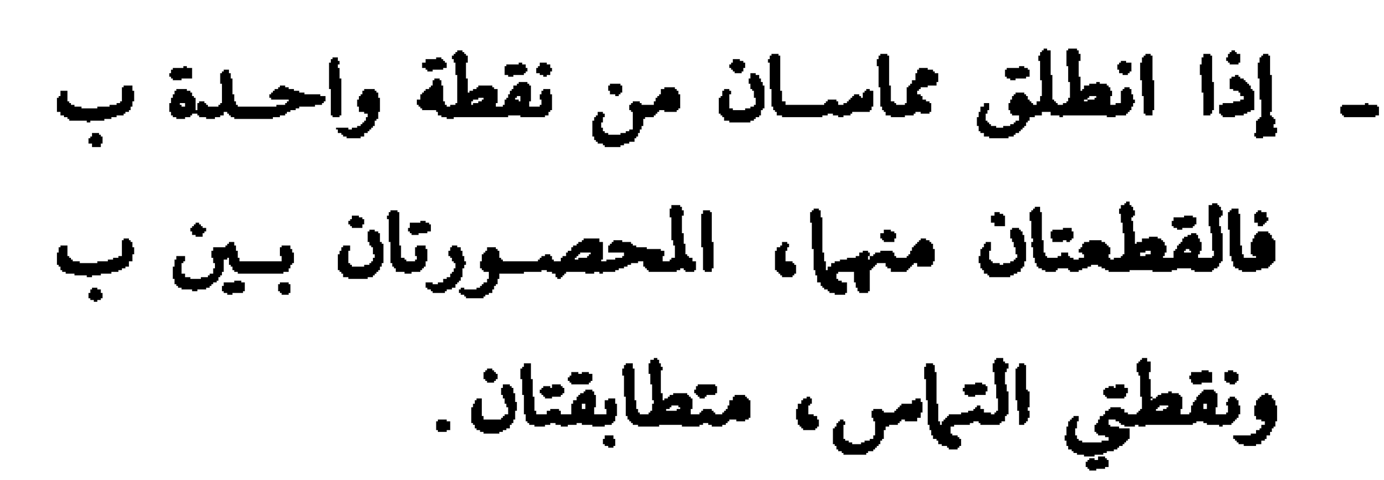
[س ص] وتر في الدائرة

س⌒ص قوس في الدائرة

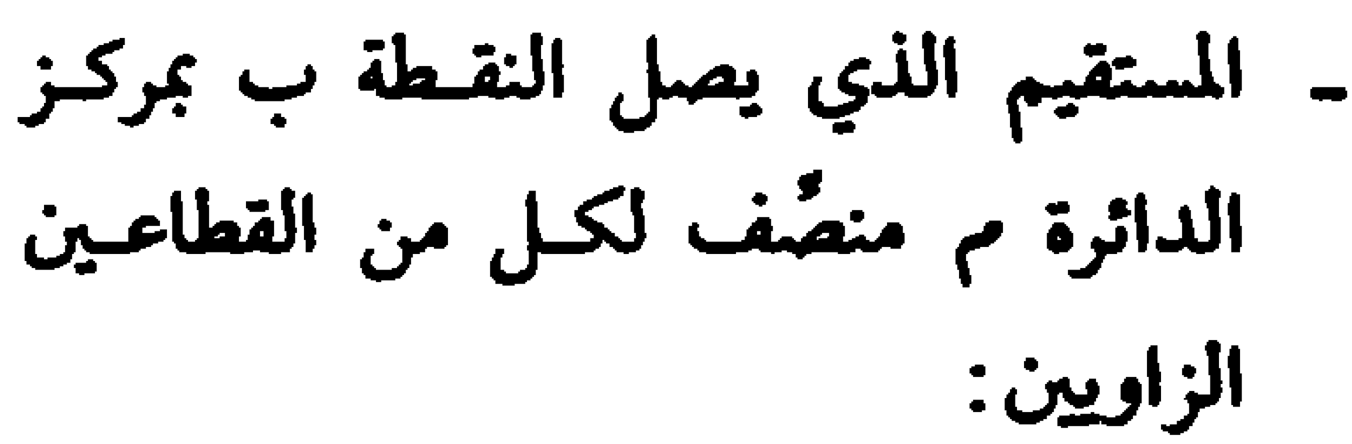
- مركز دائرة هو مركز تناظر لها.
- إن تطابق قوسان في دائرة واحدة، يتطابق قطاعاهما الزاويان المركزيان، وتتساوى زاويتاهما المركزيتان؛ وبالعكس: إذا تطابق قطاعان زاويان في دائرة واحدة تطابق قوساهما وتساوت زاويتاهما المركزيتان.
- يمكننا القول بأن قياس قوس ما هو العدد نفسه الذي نقيس به زاويته المركزية، والوحدة هي الدرجة
- $\frac{\text{طول الدائرة}}{\text{قطرها}}$ = ط = ٣,١٤
- المماس لدائرة هو العمود على قطرها، والمار في أحد طرفي هذا القطر



- كـل مثلث رؤوسه جميعها على دائـرة، وأحد أضلاعه قطر فيها، هو مثلث قائم الزاوية ب$\widehat{أ}$ج = ٩٠°



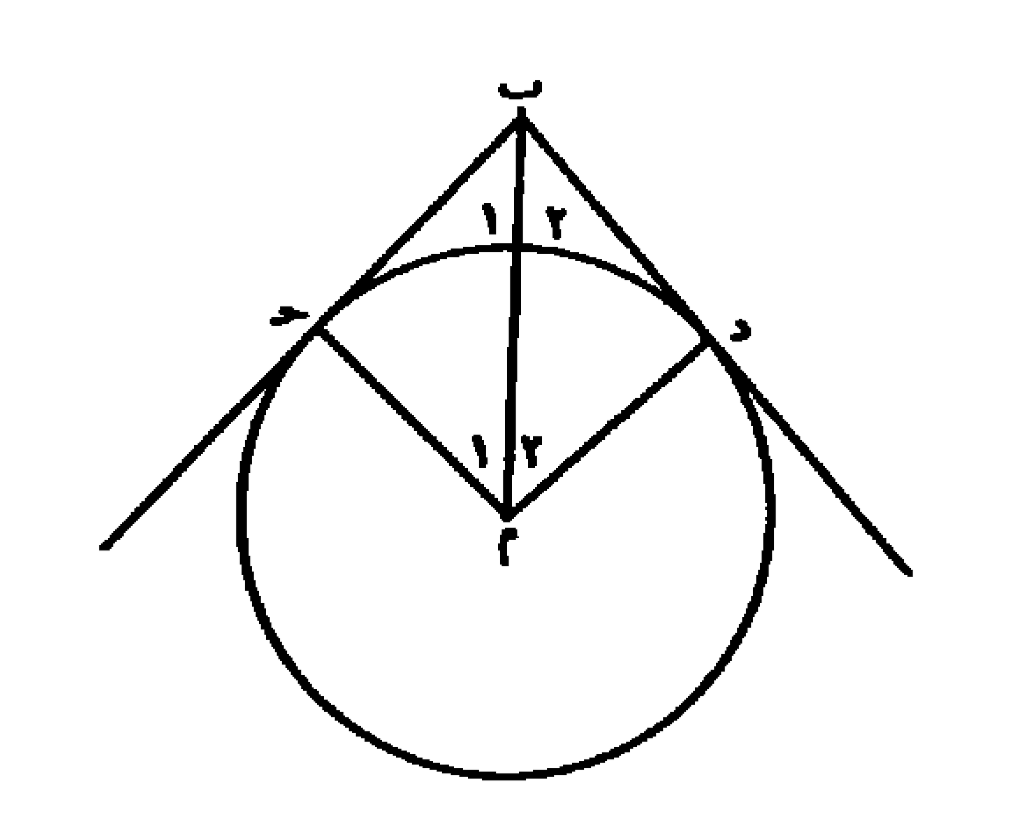
- إذا انطلق مماسـان من نقطة واحـدة ب فالقطعتان منها، المحصـورتان بـين ب ونقطتي التماس، متطابقتان.



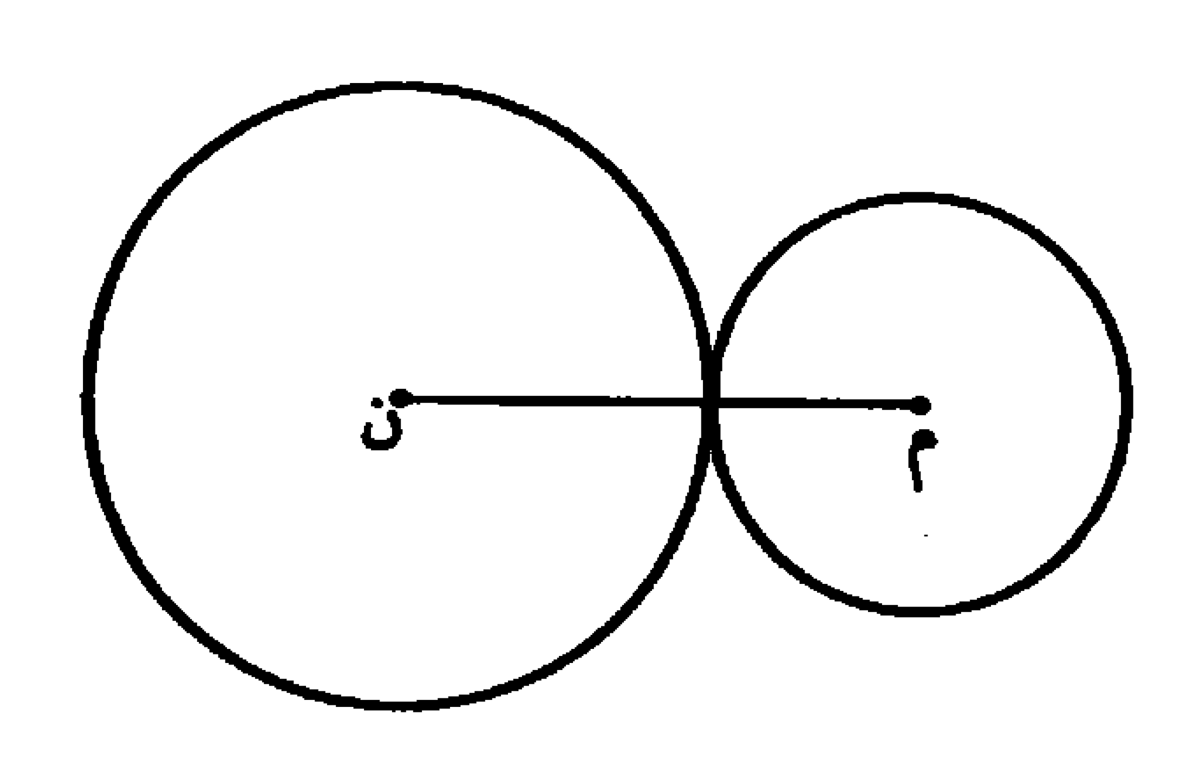
- المستقيم الذي يصل النقـطة ب بمركـز الدائرة م منصِّف لكـل من القطاعـين الزاويين:

[ب $\widehat{حـ}$ ب د] و[م $\widehat{حـ}$ م د]

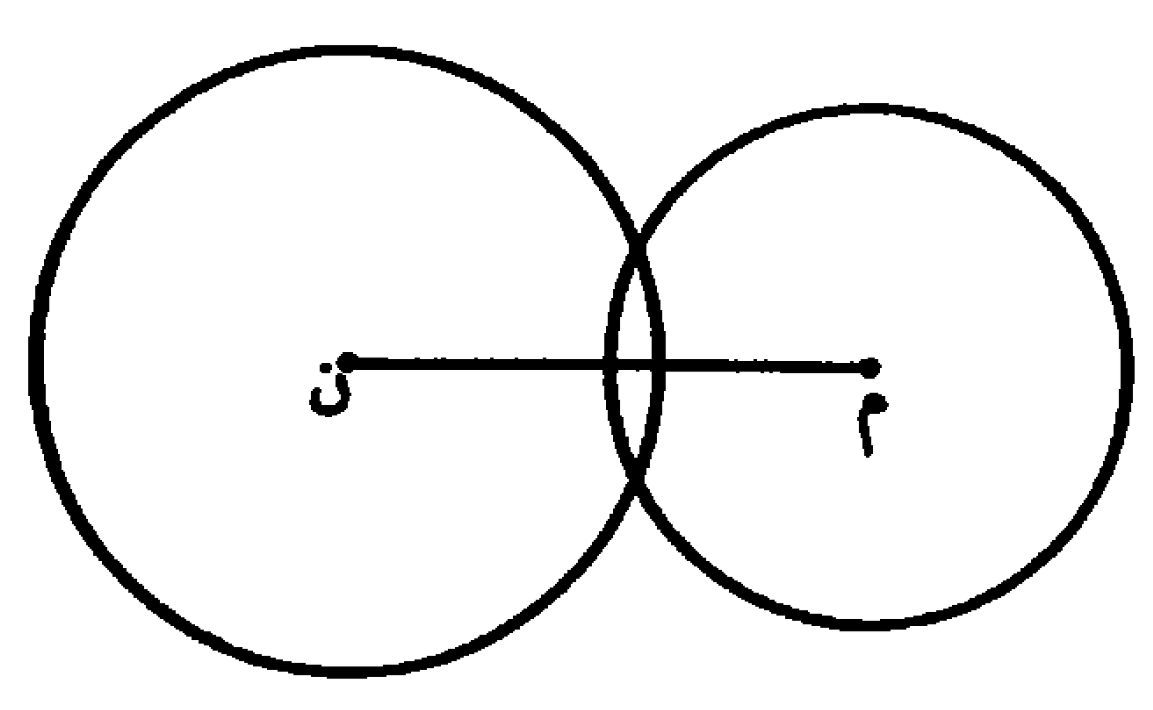
في آن معاً حيث حـ وَ د هما نقـطتا التماس.



- إذا كانت (م) و (ن) دائرتين خارجتين، فإن طول القطعة المستقيمة [م ن] التي تصل بين مركزي الدائرتين أكبر من مجموع طولي نصف قطريها.
- إذا كانت (م) و (ن) دائرتين متماستـين من الخـارج و م = $ش_١ + ش_٢$ (ش: الشعـاع) فإن طـول القطعـة المستقيمـة [م ن] التي تصل بين مركزي الدائرتين يساوي مجموع طولي نصفي قطريها.



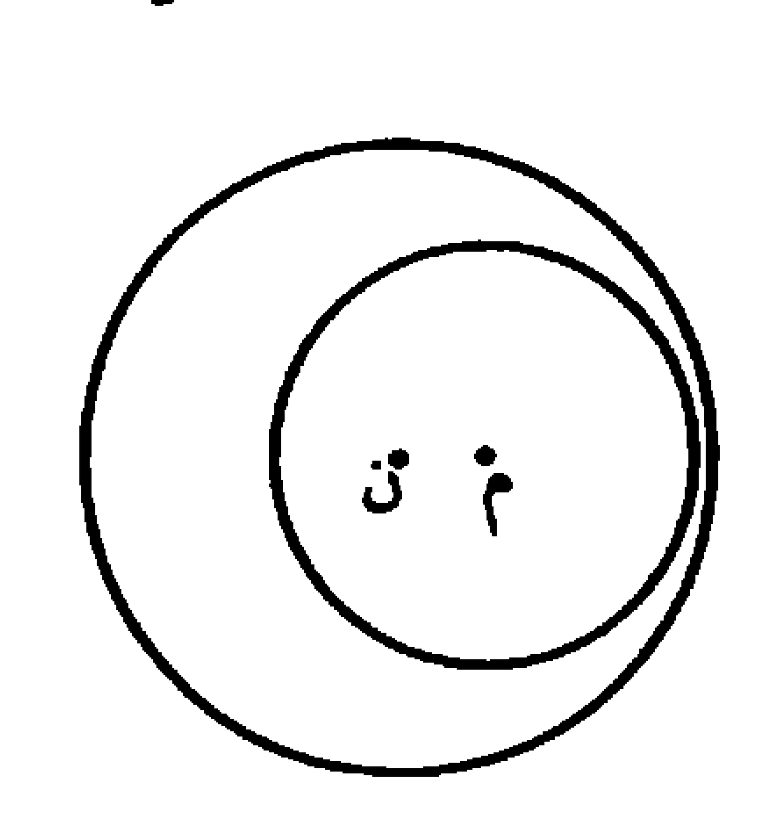
- إذا كـانـت (م) وَ (ن) دائـرتـين متقاطعتين، فإن طول القطعة المستقيمة [م ن] التي تصل بين مركزي الدائرتين محصور بين مجموع طولي نصفي قطريها والفرق بينهما.



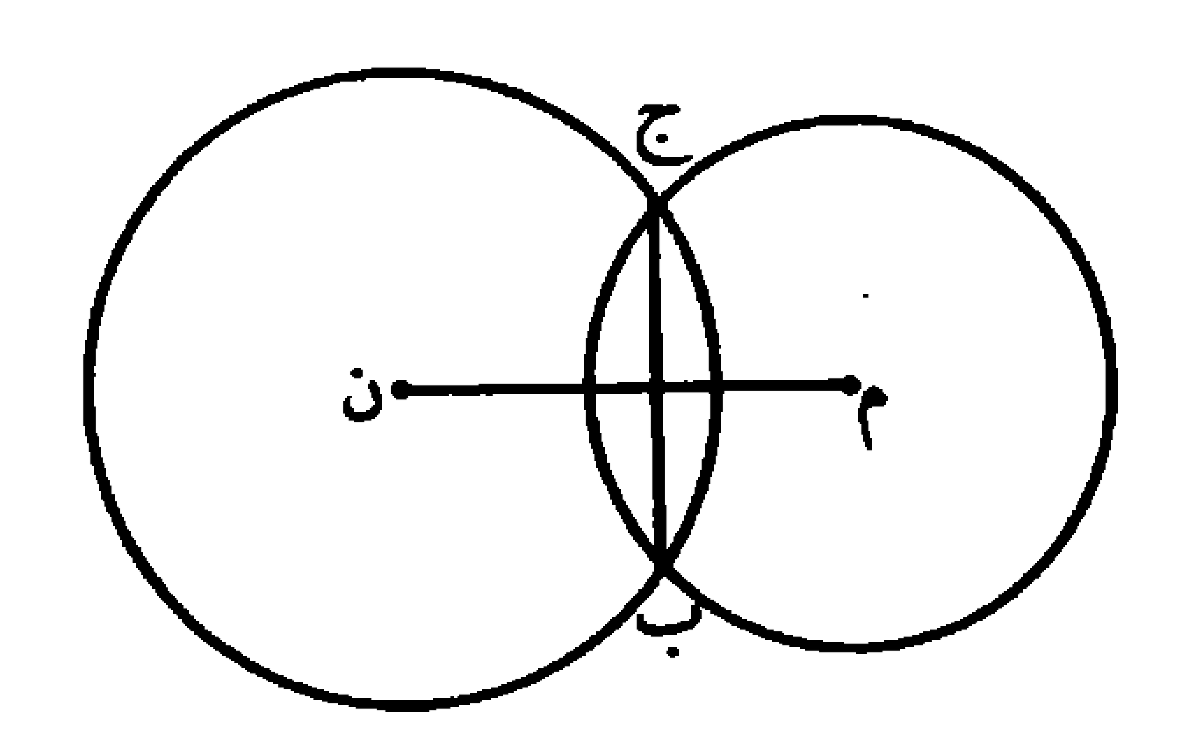
$ش_١ + ش_٢ > م ن > ش_١ - ش_٢$

- إذا كانت (م) و (ن) دائرتين متماستين من الداخل، فإن طول القطعة المستقيمة [م ن] التي تصل بين مركزي الدائرتين يساوي الفرق بين طولي نصفي قطريهما.

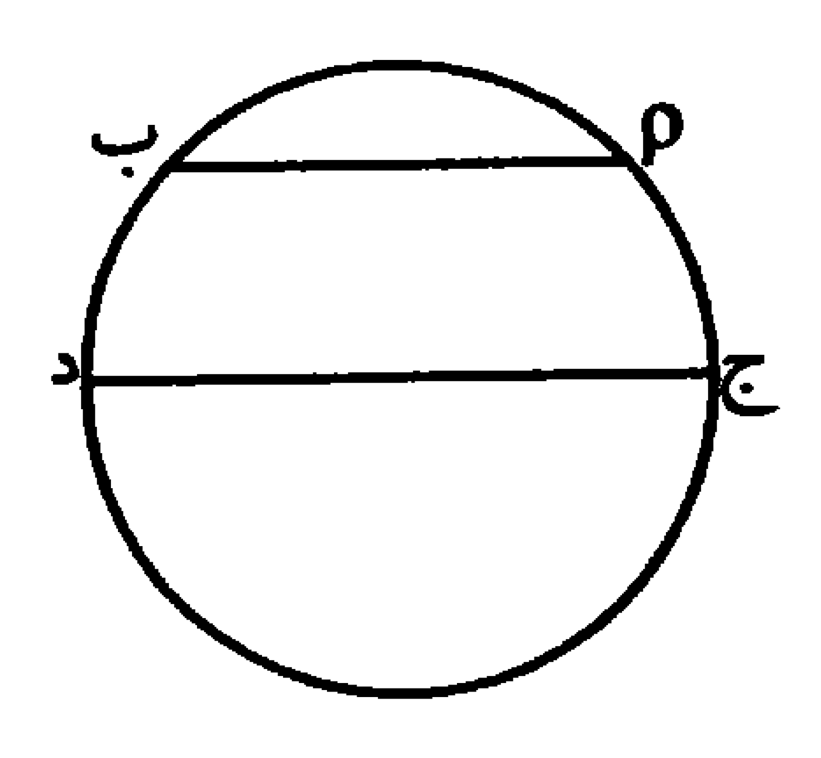
- إذا كانت (م) وَ (ن) دائرتين داخليتين، فإن طول القطعة المستقيمة التي تصل بين المركزين أصغر من الفرق بين طولي نصفي قطريهما. $|م ن| <$ ش$_1$ - ش$_2$



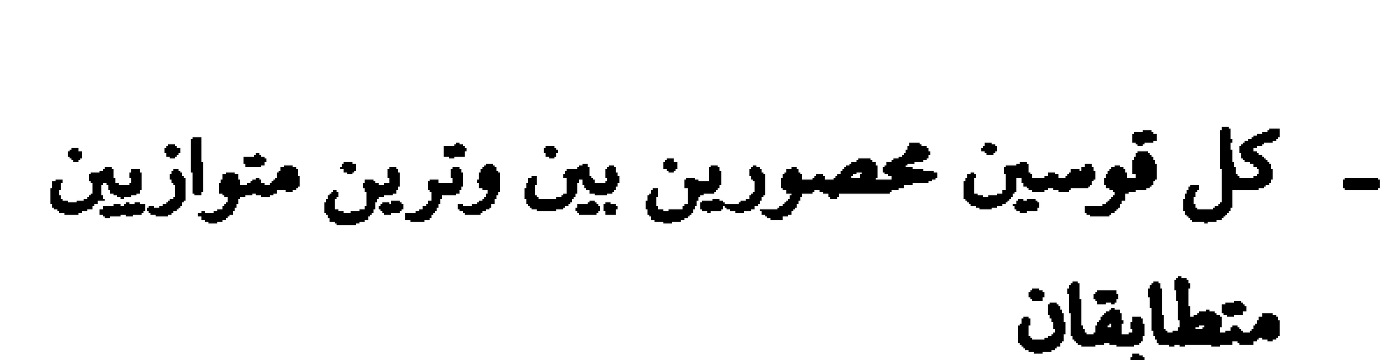
- إذا تقاطعت دائرتان (م) وَ (ن) في نقطتين ب وَ حـ فإن خط المركزين هو المنصف العمودي لـ [ب حـ]



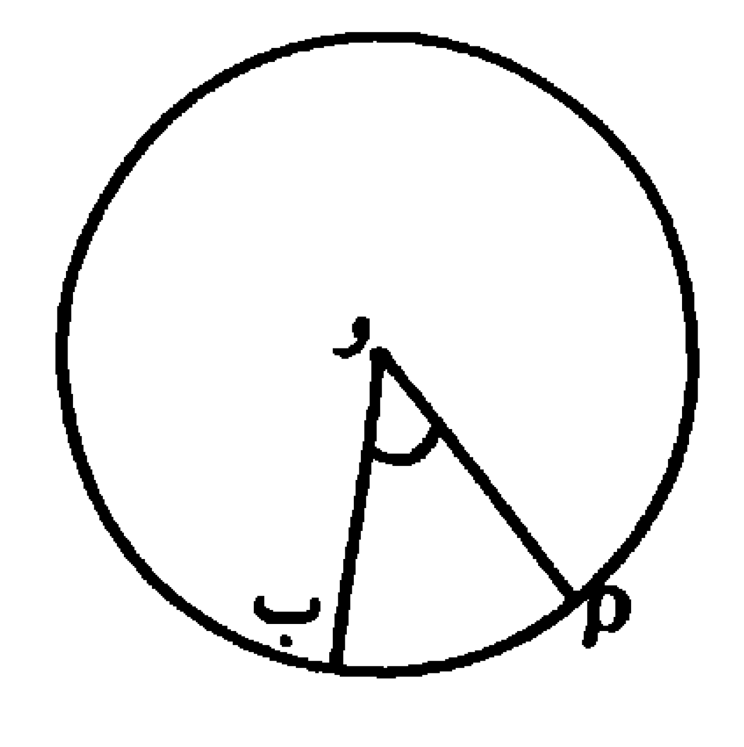
- إذا كانت (م) وَ (ن) دائرتين متماستين، فإن خط المركزين يمر بنقطة التماس.



- كل قوسين محصورين بين وترين متوازيين متطابقان

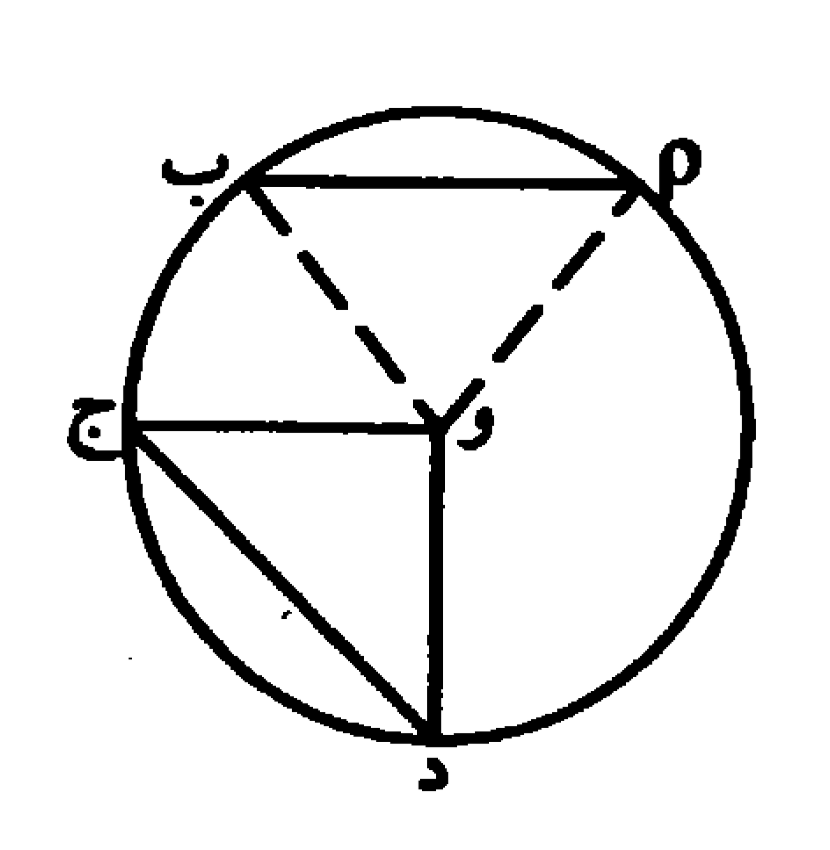


- كل وترين لا يتقاطعان داخل دائرة، ويحصران قوسين متطابقين، يكونان متوازيين.



- القطاع الزاوي المركزي هو كل قطاع زاوي رأسه مركز دائرة.

- كل قطاع زاوي مركزي يحدُّ قوساً على الدائرة، وكل قوس على الدائرة محدود بقطاع زاوي مركزي.
- القطاع الدائري هو تقاطع دائرة وداخلها مع قطاع زاوي مركزي.
- على دائرة واحدة، كلما كبر قوس أو صغر، كبرت زاوية القطاع الزاوي المركزي الذي حده، أو صغرت بالنسبة نفسها، والعكس صحيح. وإذا تطابق قوسان، تساوت زاويتا القطاعين الزاويين المركزيين اللذين يحدانهما، والعكس صحيح:



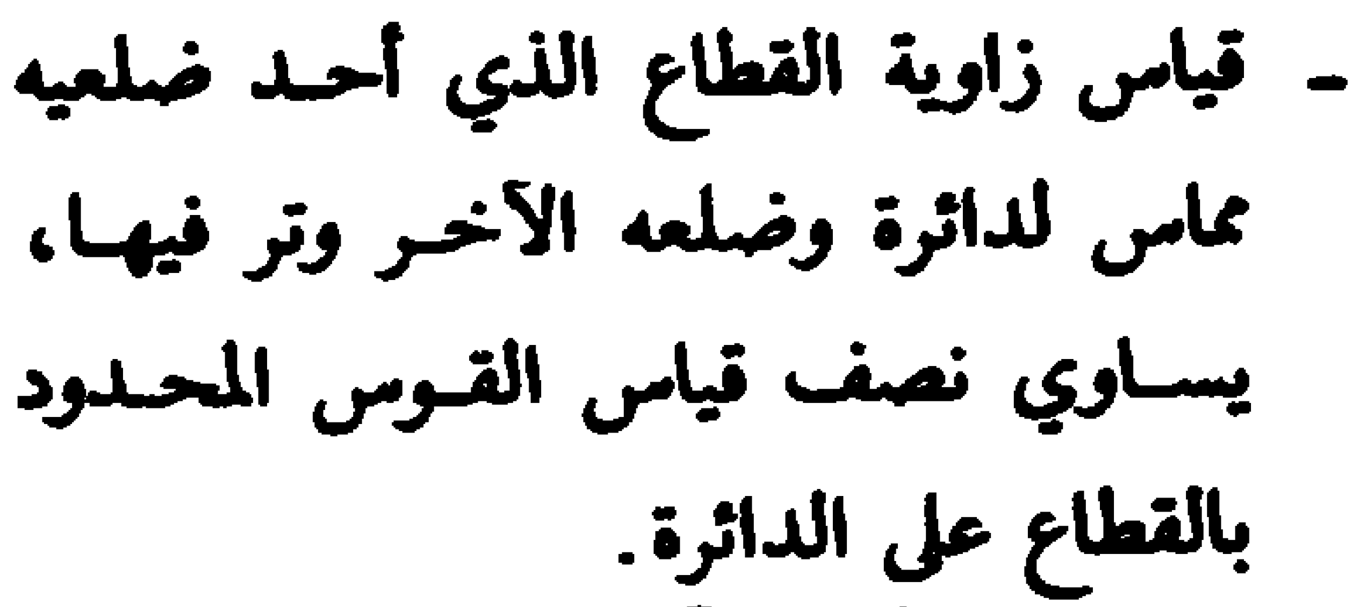
إذا كان أب = ج د فإن أ و ب = ج و د

إذا كان أ و ب = ج و د فإن أب = ج د

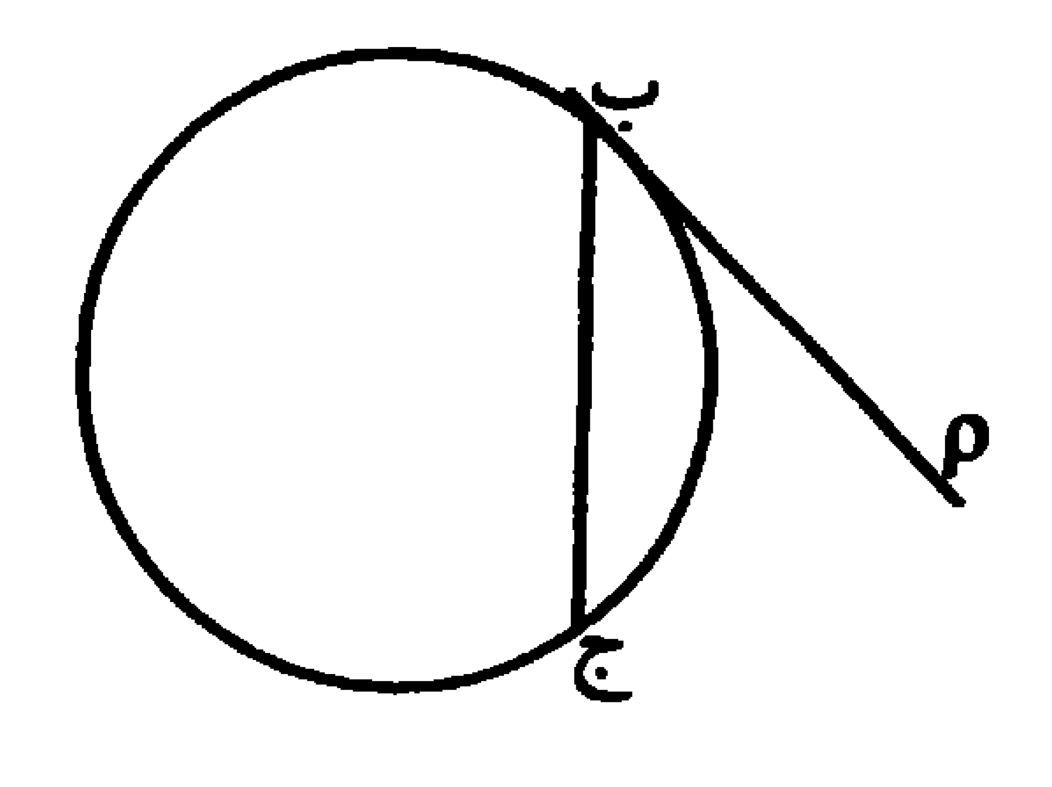
- عندما نعتمد القوس المحدّد الزاوي الذي زاويته وحدة قياس الزوايا، كوحدة لقياس الأقواس، فإن قياس الأقواس يعبَّر عنه بالعدد نفسه الذي يعبَّر به عن قياس الزوايا.
- قياس زاوية قطاع، ضلعاه وتران في دائرة، يساوي نصف قياس القوس المحدود بالقطاع على الدائرة.

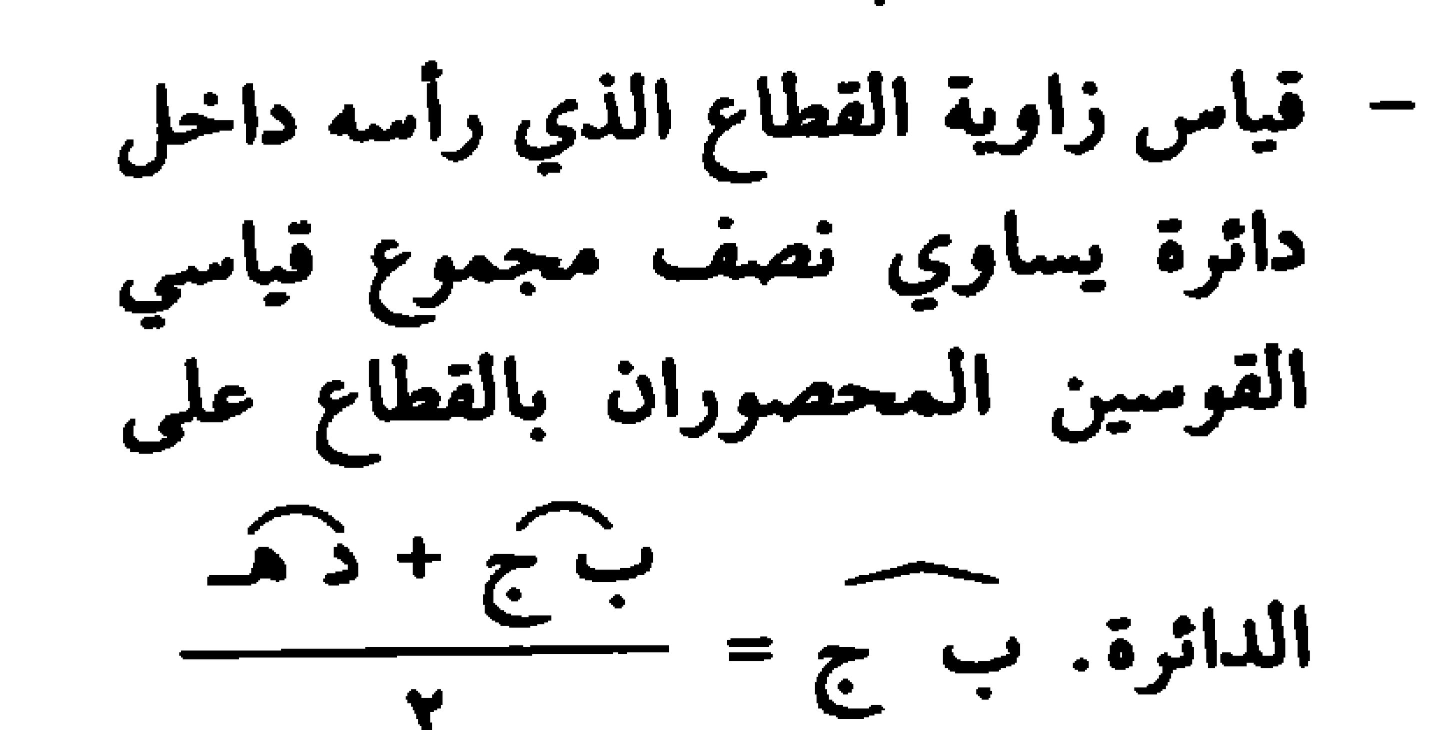
ب أ ج = ب ج / ٢

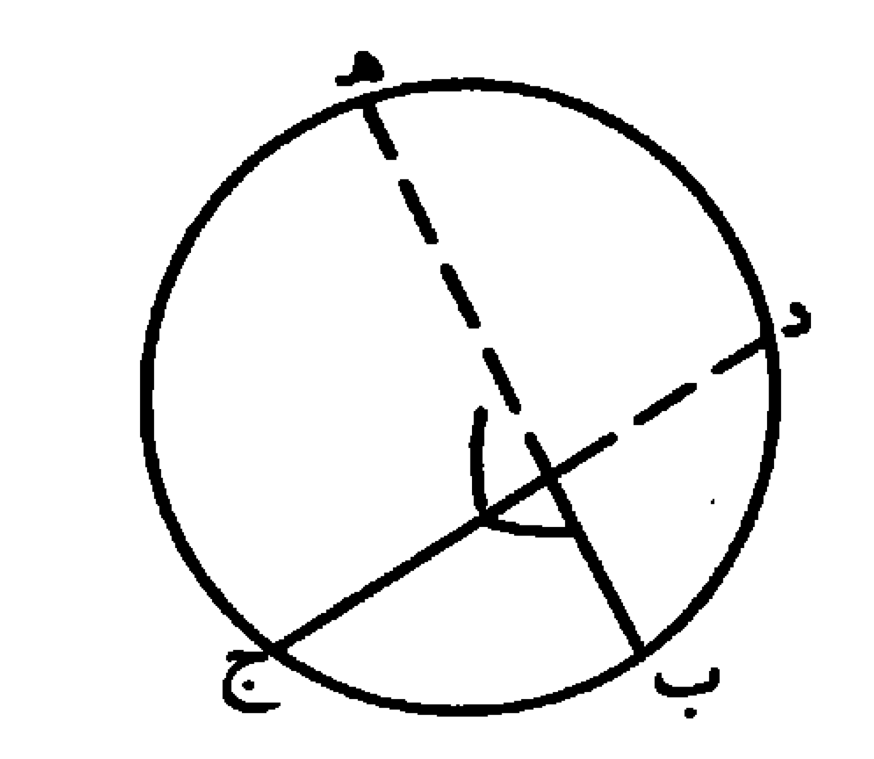
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس.

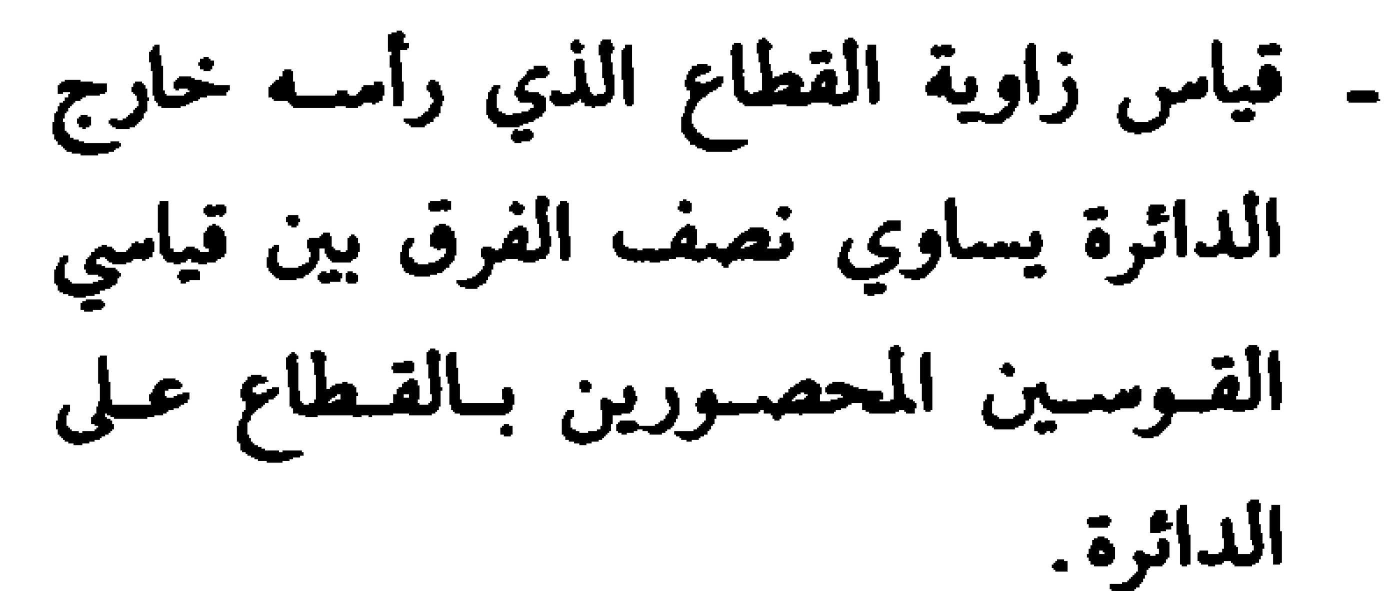

- قياس زاوية القطاع الذي أحد ضلعيه مماس لدائرة وضلعه الآخر وتر فيها، يساوي نصف قياس القوس المحدود بالقطاع على الدائرة.

$$\widehat{\text{ب أ ج}} = \frac{\widehat{\text{ب ج}} + \widehat{\text{د هـ}}}{٢}$$

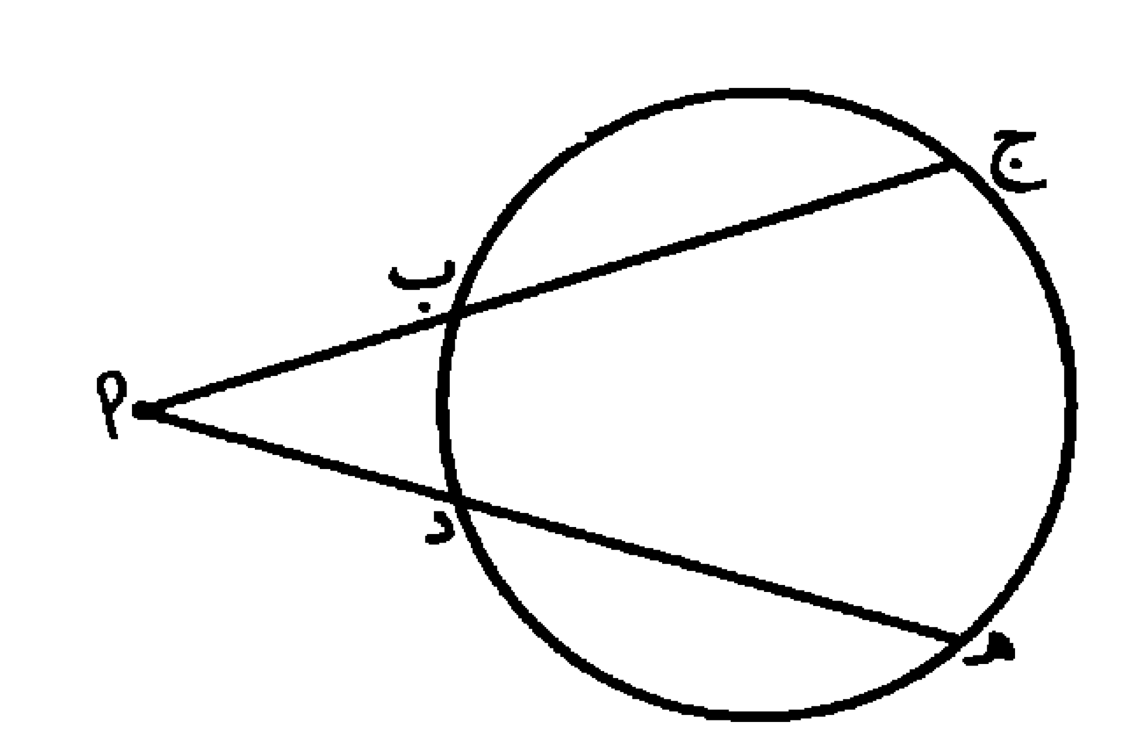


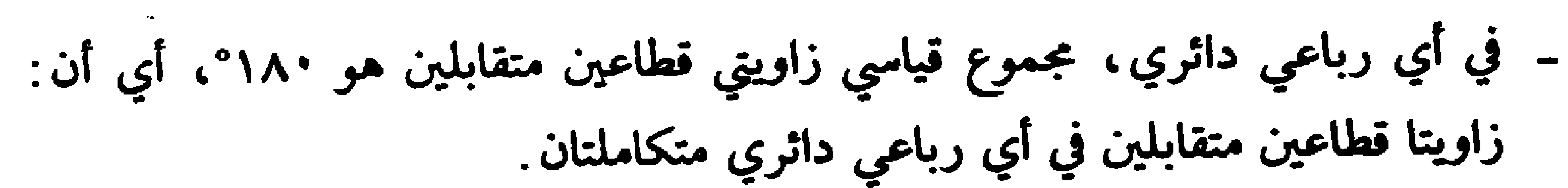

- قياس زاوية القطاع الذي رأسه داخل دائرة يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المحصوران بالقطاع على الدائرة. $\widehat{\text{ب ج}} = \frac{\widehat{\text{ب ج}} + \widehat{\text{د هـ}}}{٢}$

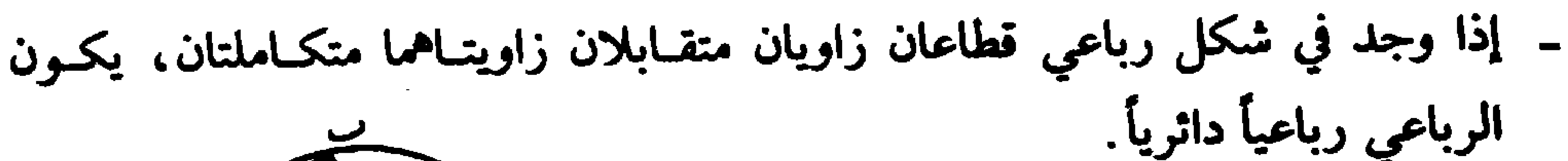


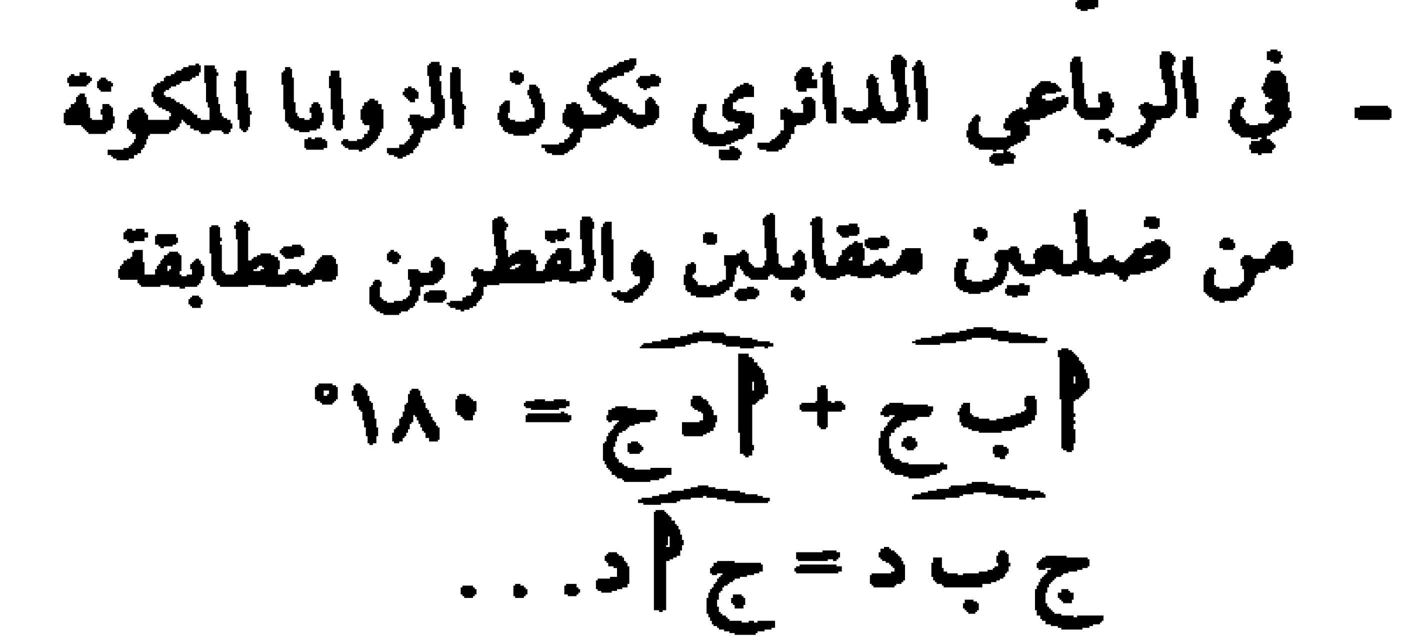

- قياس زاوية القطاع الذي رأسه خارج الدائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المحصورين بالقطاع على الدائرة.

$$\widehat{\text{ب أ د}} = \frac{\widehat{\text{ج هـ}} - \widehat{\text{ب د}}}{٢}$$




- في أي رباعي دائري، مجموع قياسي زاويتي قطاعين متقابلين هو ١٨٠°، أي أن: زاويتا قطاعين متقابلين في أي رباعي دائري متكاملتان.


- إذا وجد في شكل رباعي قطاعان زاويان متقابلان زاويتاهما متكاملتان، يكون الرباعي رباعياً دائرياً.


- في الرباعي الدائري تكون الزوايا المكونة من ضلعين متقابلين والقطرين متطابقة

$$\widehat{\text{أ ب ج}} + \widehat{\text{أ د ج}} = ١٨٠°$$

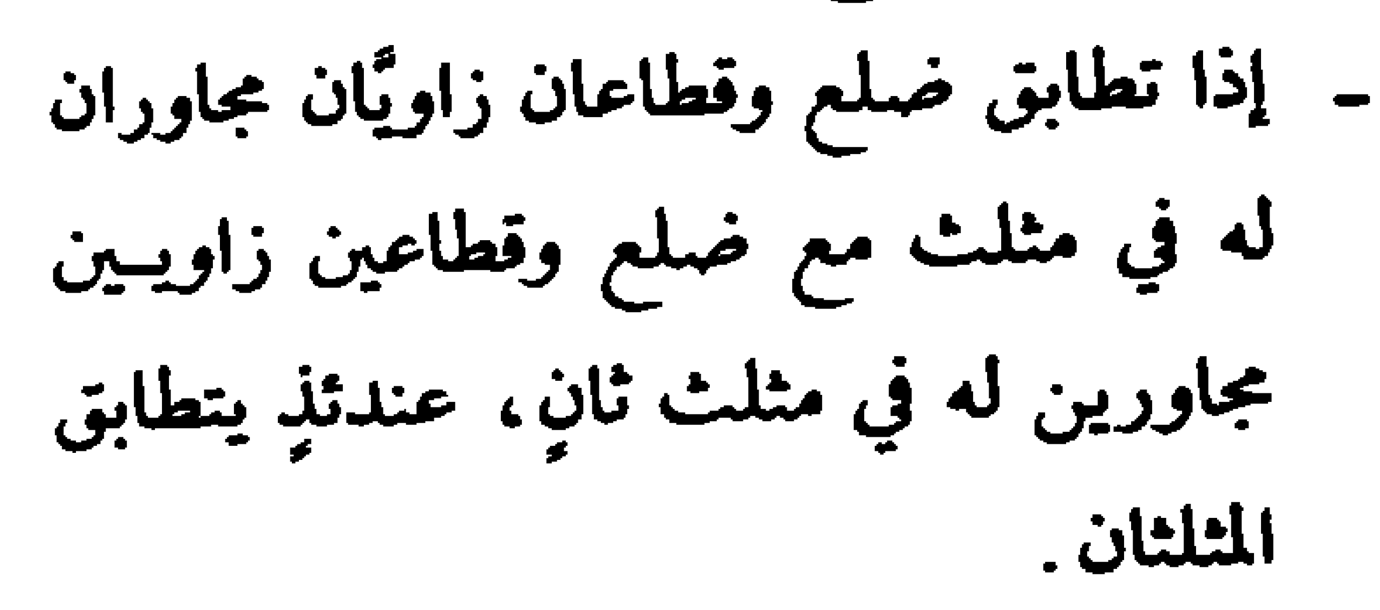
$$\widehat{\text{ج ب د}} = \widehat{\text{ج أ د}} \ldots$$


- إذا كانت الزوايا المتصالبة في رباعي متطابقة يكون الرباعي رباعي دائري.

الفصل التاسع

المثلثات المتطابقة

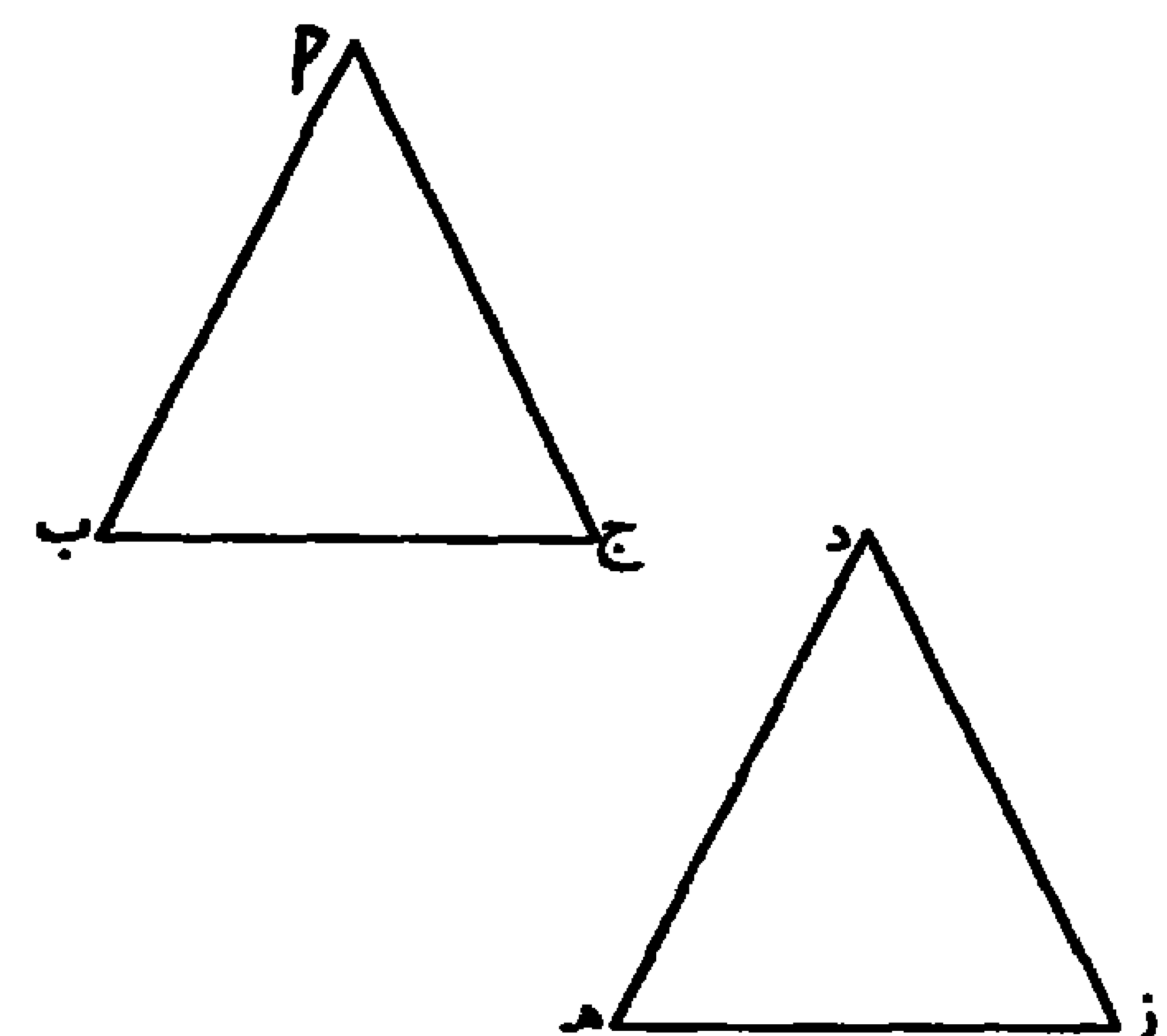
تعريف: تطابق مثلثين يعني: تطابق أضلاعهما، وتطابق قطاعاتها الزاوية المواجهة للأضلاع المتطابقة.



- إذا تطابق ضلع وقطاعان زاويّان مجاوران له في مثلث مع ضلع وقطاعين زاويين مجاورين له في مثلث ثانٍ، عندئذٍ يتطابق المثلثان.



إذا كان: |هـ ز| = |ب ج|



$\widehat{د هـ ز}$ = $\widehat{أ ب ج}$؛ $\widehat{د ز هـ}$ = $\widehat{أ ج ب}$ فإن المثلثين متطابقان.

- إذا تطابق أضلاع مثلثين، يتطابق المثلثان:

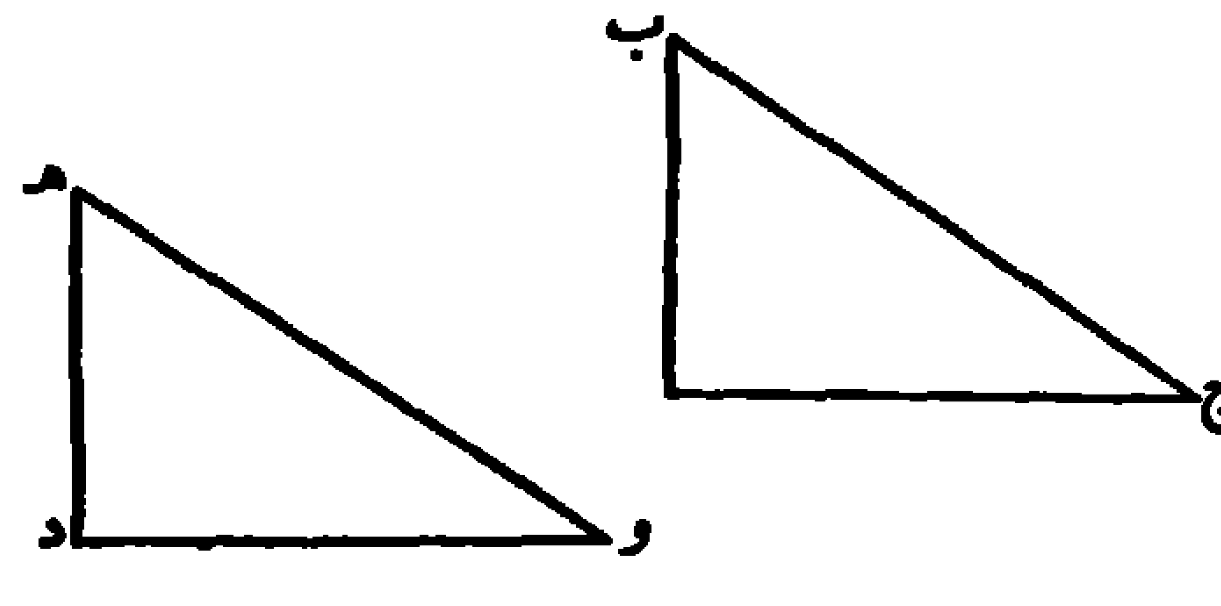
إذا كان: |ز د| = |أ ج| |ز هـ| = |ج ب|؛ |د هـ| = |أ ب|. يتطابق المثلثان.

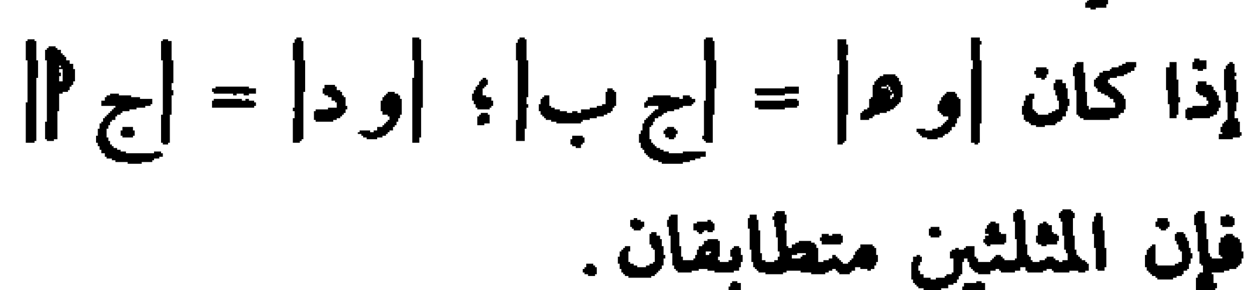
- إذا تطابق قطاع زاوي وضلعاه في مثلثين، يتطابق المثلثان.

إذا كان: $\widehat{د ز هـ}$ = $\widehat{أ ج ب}$؛ |ز د| = |ج أ| |ز هـ| = |ج ب| فإن المثلثين يتطابقان.

- إذا تطابق إضلاع مثلثين، يتطابق المثلثان.

- إذا تطابق الوتر وضلع واحد في مثلثين قائمي الزاوية يتطابق المثلثان.





إذا كان |و هـ| = |ج ب|؛ |و د| = |ج أ|

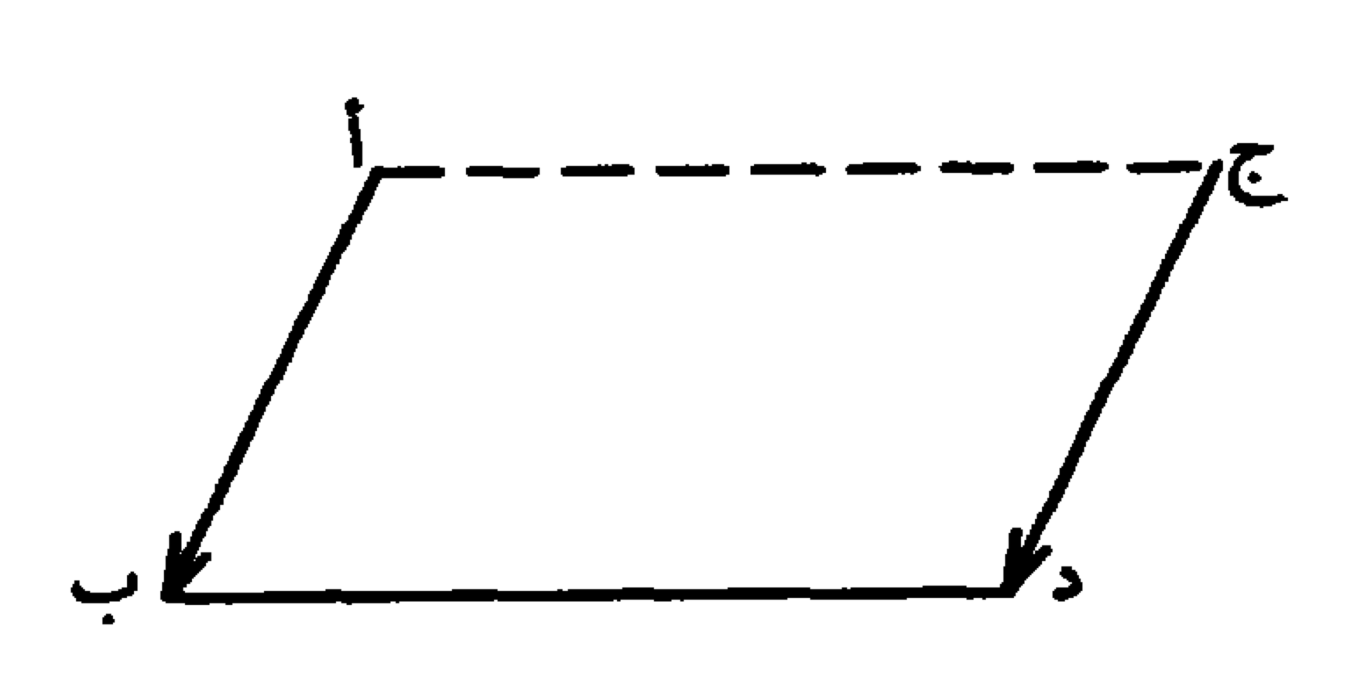
فإن المثلثين متطابقان.

- إذا تطابق الوتر وقطاع زاوي حاد في مثلثين قائمي الزاوية، يتطابق المثلثان.

إذا كان |و هـ| = |ج ب|؛ $\widehat{هـ و د}$ = $\widehat{ب ج أ}$ فإن المثلثان يتطابقان

الفصل العاشر

الانسحاب Translation



- تعريف: الانسحاب تقايس، أي إن صورة كل قطعة مستقيمة بالانسحاب هي قطعة مستقيمة لها الطول نفسه.

$\overrightarrow{[أ ب]} \leftarrow \overrightarrow{[ج د]}$

- يتحدّد الانسحاب على مستقيم معين بعنصرين:

١ - مقياس الانسحاب، وهو المسافة بين أية نقطة على المستقيم وصورتها.

٢ - منحى الانسحاب، وهو طريقة التوجه على المستقيم، حامل الانسحاب.

- إذا كان سہ سہ′ // ص ص′، م ∈ سہ سہ′ وَ ن ∈ ص ص′، وم ن العمود المشترك على سہ سہ′ وص ص′ فإن:

١ - ث$_{سہ سہ'}$ ○ ت$_{ص ص'}$ يكافىء انسحاباً بموازاة م ن، منحاه من ن نحو م وقياسه ٢ × |م ن|

٢ - ث$_{ص ص'}$ ○ ت$_{س س'}$ يكافىء انسحاباً بموازاة م ن، منحاه من م نحو ن، وقياسه ٢ × |م ن|

- كل انسحاب هو تركيب لتناظرين حول محورين متوازيين.

خصائص الانسحاب:

الانسحاب:

١ - يحوِّل كل مستقيم إلى مستقيم

٢ - هو تقايس (يحافظ على الأطوال)

٣ - يحافظ على الزوايا

٤ - يحافظ على التوازي

٥ - يحافظ على التعامد.

الفصل الحادي عشر

الدوران Rotation

- الدوران تقايس، يحوِّل كل قطعة مستقيمة إلى قطعة مستقيمة لها الطول نفسه.



- الدوران يحوِّل كل قطاع زاوي إلى قطاع زاوي متطابق معه، أي أن الدوران يحافظ على الزوايا.
- نستخلص أيضاً أن الدوران يحافظ على التعامد، لأن صورة قطاع زاوي قائم بدوران هو قطاع زاوي قائم أيضاً.
- الدوران (م ، + ١٨٠°) هو تناظر حول النقطة م.

الفصل الثاني عشر

المتجهات

تعريف: تسمّى الكتابة الرمزية $\overleftarrow{\text{أب}}$ متجها حيث أن:

أ هي أصل المتجه

ب هي طرف المتجه

أب هو حامل المتجه

التوجه من أ نحو ب هو منحنى المتجه

وَ |أب| هو مقياس المتجه

- المتجهان $\overleftarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftarrow{\text{حـد}}$ متساويان، يكافئه
١ - $\overleftarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftarrow{\text{حـد}}$ لهما الاتجاه والمنحنى نفساهما.
٢ - $|\overleftarrow{\text{أب}}| = |\overleftarrow{\text{حـد}}|$

ويكافئه أن $\overleftarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftarrow{\text{حـد}}$ يمثلان الانسحاب نفسه

- إن مجموع متجهين $\overleftarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftarrow{\text{حـد}}$ هو المتجه الذي يحدِّد حاصل تركيب الانسحابين المتتاليين أب وَ حـ د نشير له بالرمز $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{حـد}}$
- عملية جمع المتجهات عملية إبدالية، أي أن:

$$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{حـد}} = \overleftarrow{\text{حـد}} + \overleftarrow{\text{أب}}$$

- $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أد}} = \overleftarrow{\text{أحـ}}$ حيث حـ هي الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع الذي رؤوسه الأخرى أ، ب، د
- إن عملية جمع المتجهات عملية تجميعية ، أي أن:

$\overrightarrow{\text{أب}} + (\overrightarrow{\text{حـد}} + \overrightarrow{\text{هـد}}) = (\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{حـد}}) + \overrightarrow{\text{هـو}}$.

- نظير متجه $\overrightarrow{\text{أب}}$ هو المتجه $\overrightarrow{\text{بأ}}$ المحدَّد كما يلي:

١ - إتجاهه هو المستقيم أب، أو أي مستقيم موازٍ لـ أب

٢ - منحا ○ هو عكس منحى $\overrightarrow{\text{أب}}$

٣ - مقياسه هو مقياس $\overrightarrow{\text{أب}}$ نفسه أي:

$$|\overrightarrow{\text{بأ}}| = |\overrightarrow{\text{أب}}|$$

$$\text{فنكتب } \overrightarrow{\text{أب}} = -\overrightarrow{\text{بأ}}$$

- المتجه الصفري هو العنصر المحايد في جمع المتجهات

$$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{أب}}$$

- المتجه الصفري هو المتجه الذي يحدِّد الانسحاب الذي يحافظ على كل نقطة في المستوى، ويرمز له بالرموز التالية $\overrightarrow{0}$ أو $\overrightarrow{\text{ن ن}}$ أو $\overrightarrow{\text{حـ حـ}}$ .. الخ.

- مهما كانت النقطة م، ومهما كان المتجه أب فإن:

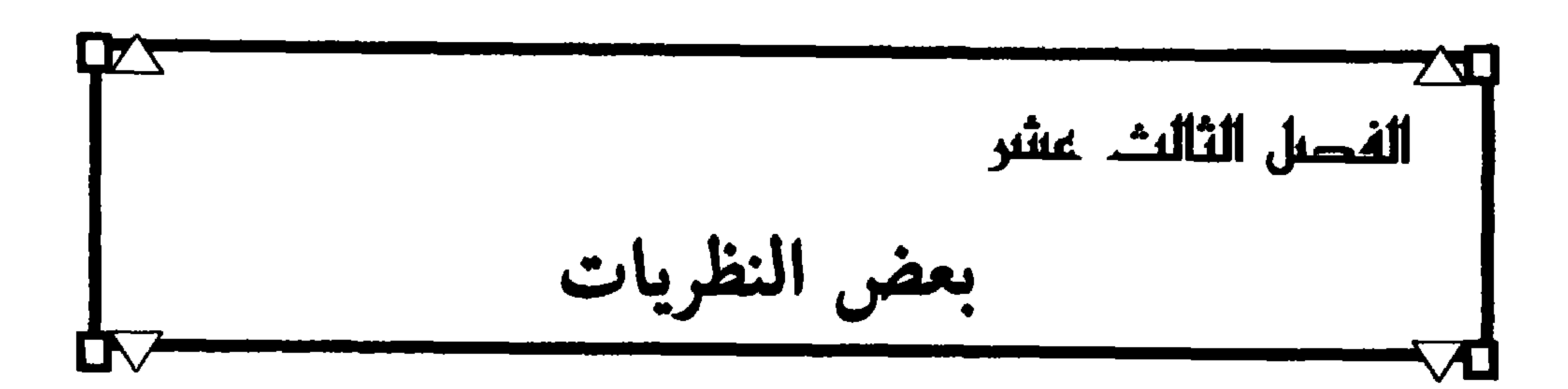
$$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{م ب}} - \overrightarrow{\text{م أ}}$$

- القياس الجبري لمجموع متجهين هو مجموع القياسين الجبريين للمتجهين.

- إحداثي النقطة أ على محور الأعداد الحقيقية هو م أ = ل حيث م هي نقطة الأصل.

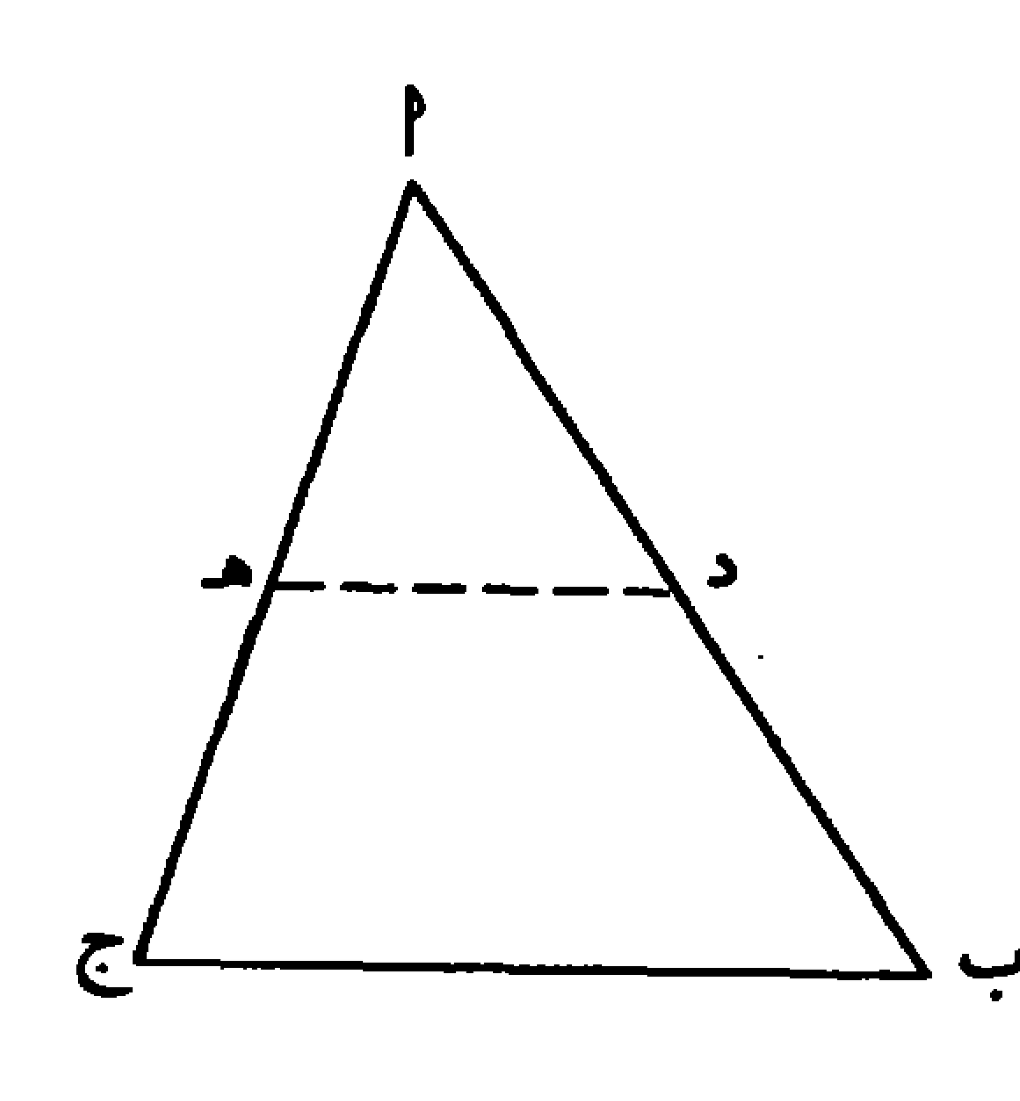
- القياس الجبري المتجه على محور هو حاصل طرح إحداثي أصله من إحداثي طرفه.

- إحداثي منتصف قطعة مستقيمة يساوي نصف مجموع إحداثي طرفيها.



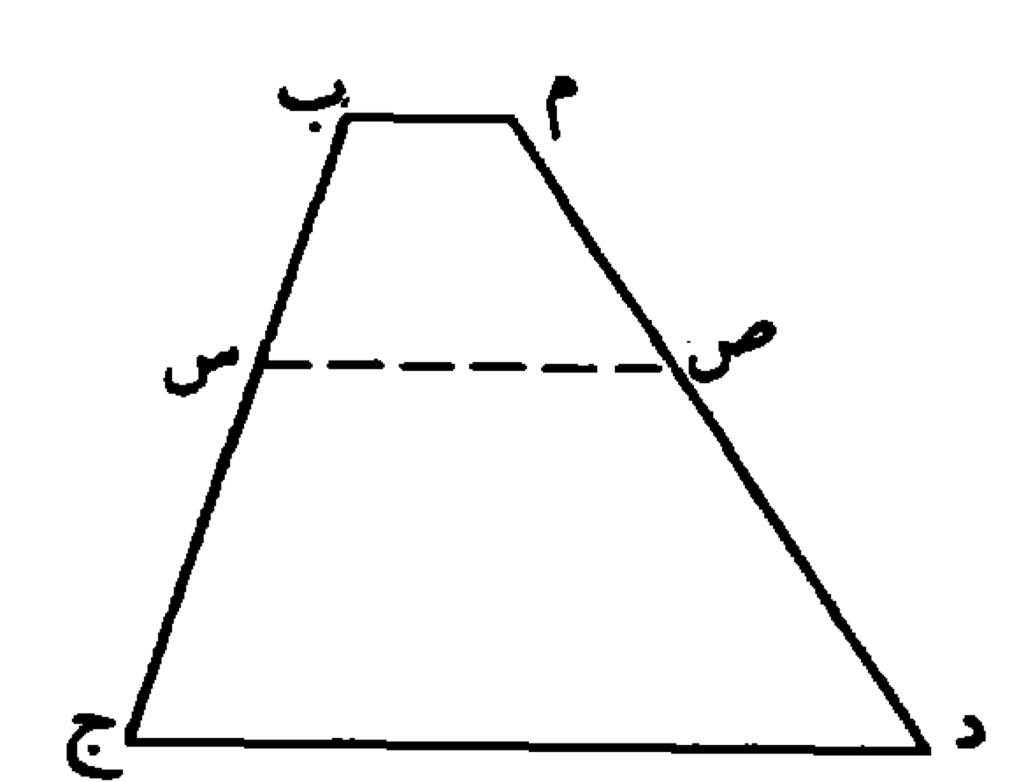
الفصل الثالث عشر

بعض النظريات



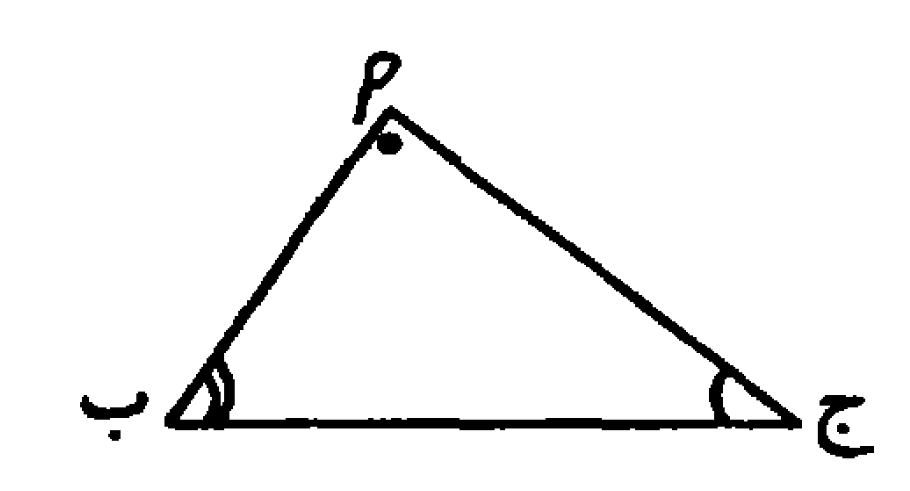
- نظرية طاليس، إذا كانت د نقطة على الخط (أب) وَ هـ نقطة على الخط (أج) والخط د هـ موازٍ للخط ب ج.

يكون معنا: $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أج}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ب ج}}$

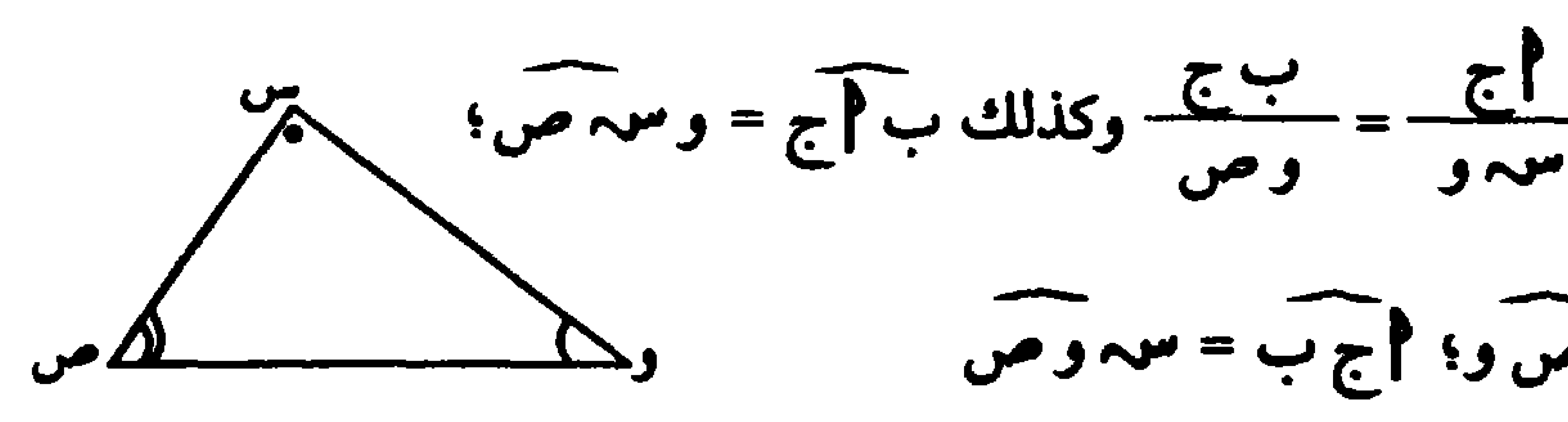


- في شبه المنحرف: إذا كانت س ص متوازية مع أب وَ د ج يكون معنا:

$\frac{\text{أص}}{\text{أد}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ب ج}}$ أو $\frac{\text{أص}}{\text{ص د}} = \frac{\text{ب س}}{\text{س ج}}$ . . .



- المثلثات المشابهة نقول عن مثلثين إنهما متشابهان إذا كانت الجهات متناسبة والزوايا متطابقة.



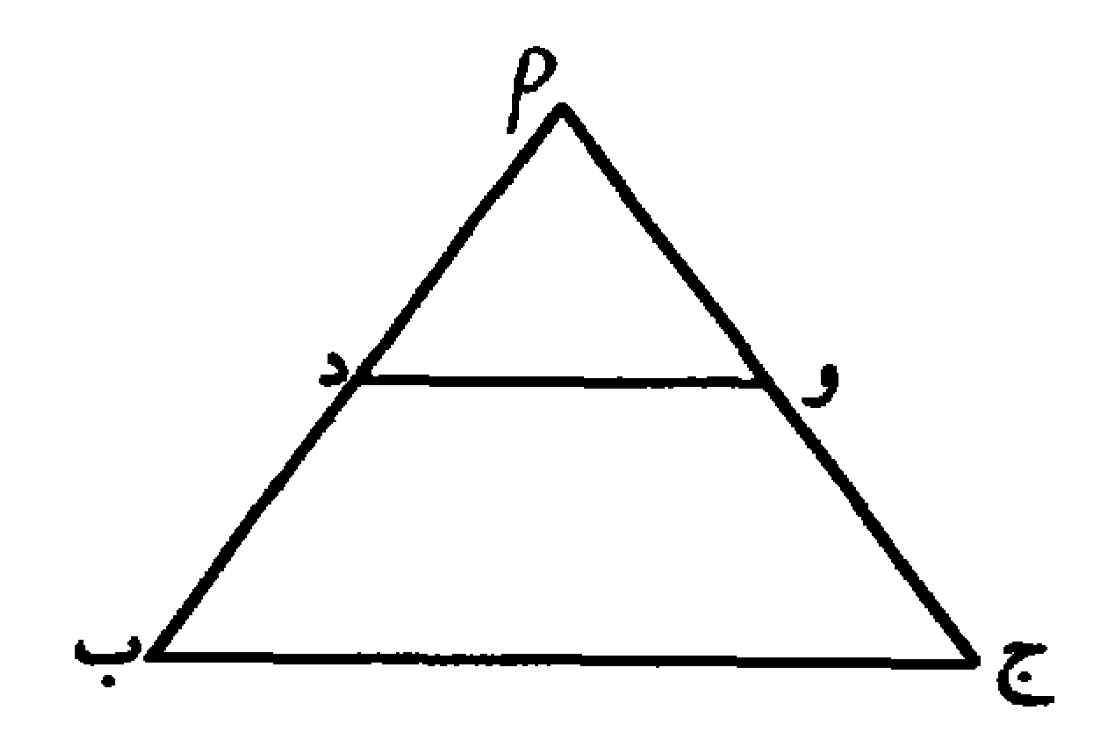
$\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{أج}}{\text{س و}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{و ص}}$ وكذلك $\widehat{\text{ب أ ج}} = \widehat{\text{و س ص}}$؛

$\widehat{\text{أ ب ج}} = \widehat{\text{س ص و}}$؛ $\widehat{\text{أ ج ب}} = \widehat{\text{س و ص}}$

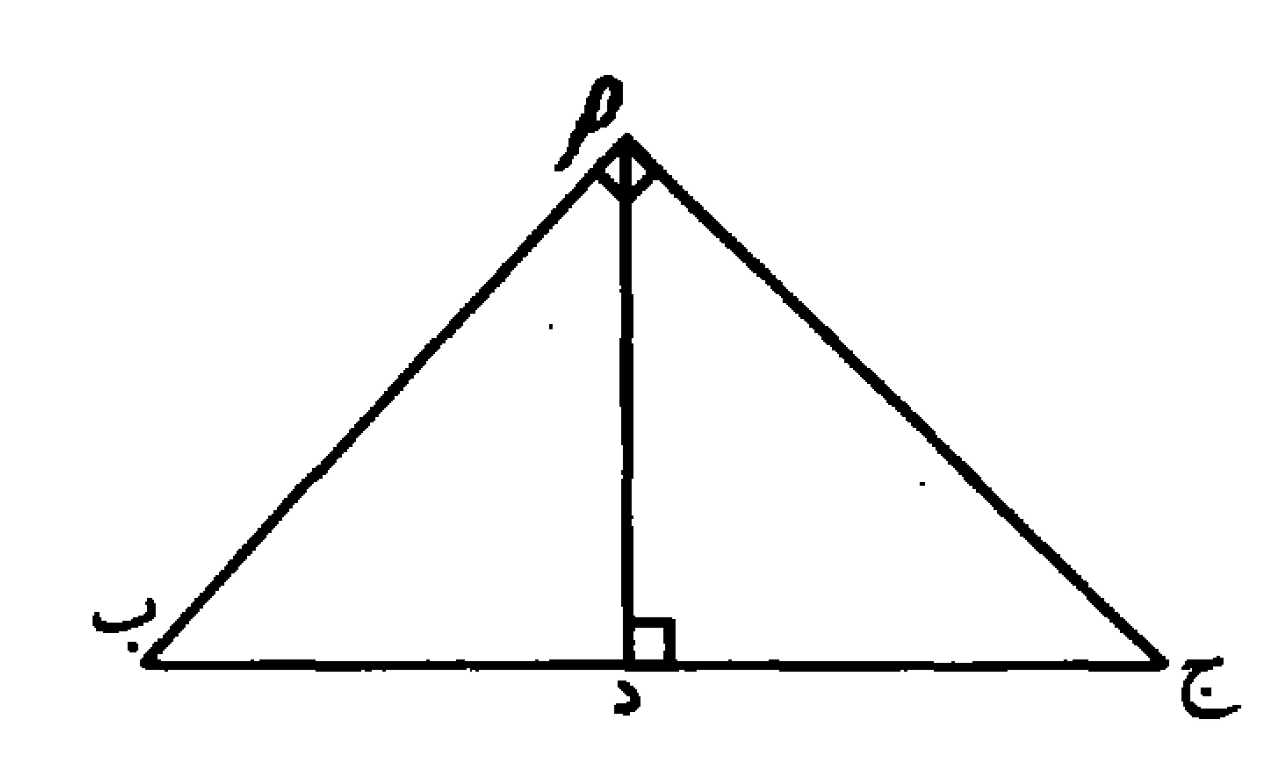
- نقول عن مثلثين إنهما متشابهان إذا وجدنا فيهما زاويتين متطابقتين.
- نقول عن مثلثين إنهما متشابهان إذا كان عندهما زاوية واحدة متطابقة، وجهات هذه الزاوية متناسبة.
- نقول عن مثلثين إنهما متشابهان إذا كان عندهما الجهات الثلاث متناسبة.
- في المثلثات المتساوية الضلعين تكفي زاوية واحدة متطابقة كي تصبح المثلثات متشابهة.
- في المثلثات القائمة تكفي زاوية حادة متطابقة كي تصبح المثلثات متشابهة.
- في أي مثلث كان، القطعة المستقيمة التي تجمع وسطي ضلعين تكون متوازية على الضلع الثالث وطولها يعادل نصف هذا الضلع.

إذا كان د نصف [أب] وَ و نصف [أج] يكون معنا: د و // ب ج؛ |د و| = $\frac{|ب ج|}{٢}$

- إذا رسمنا من وسط ضلع من أضلاع المثلث خطاً موازياً لضلع آخر يمر هذا الخط في وسط الضلع الثالث.



نظرية فيثاغورس وتطبيقاتها



- في المثلث القائم الزاوية يكون مربع الوتر يعادل مجموع مربعات جهات الزاوية القائمة [ب ج]^2 = [أ ج]^2 + [أ ب]^2

- مربع كل ضلع من ضلعي الزاوية القائمة يعادل حاصل ضرب الوتر بمسقط هذا الضلع.

[أ ب]^2 = |ب ج| × |ب د|

[أ ج]^2 = |ج ب| × |ج د|

- إن حاصل ضرب جهتي الزاوية القائمة يعادل حاصل ضرب الوتر بالارتفاع.

|أ ب| × |أ ج| = |ب ج| × |أ د|.

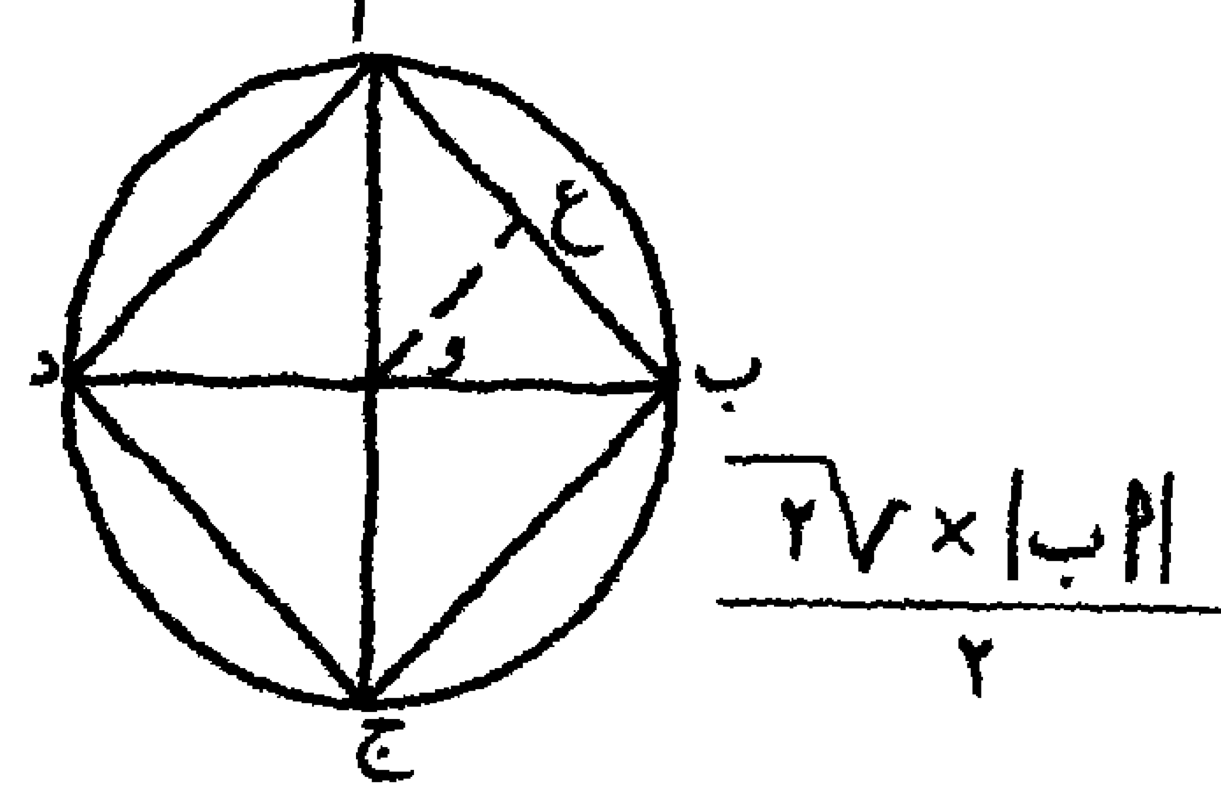
- إن تربيع الارتفاع يعادل حاصل ضرب قطعتي المستقيم اللتين يرسمهما على الوتر.

[أ د]^2 = |د ب| × |د ج|

- إن مقلوب مربع الارتفاع يعادل مجموع مقلوب مربع كل من جهتي الزاوية القائمة:

١ / [أ د]^2 = ١ / [أ ب]^2 + ١ / [أ ج]^2

التطبيقات



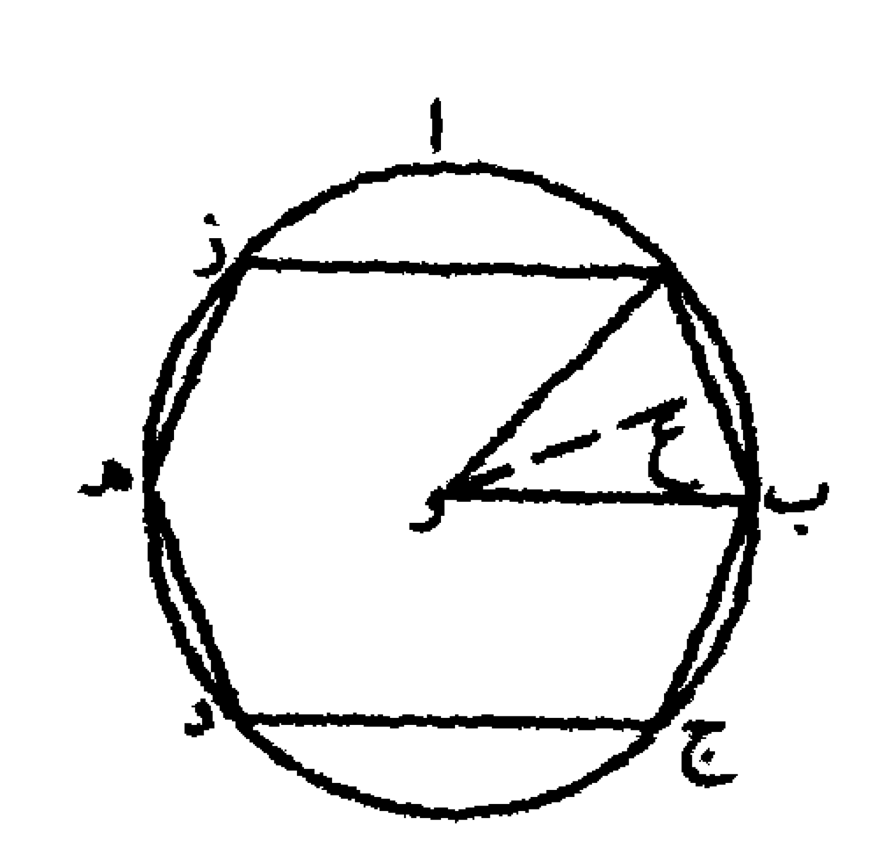
قطر المربع بالنسبة لطول الجهة أو الضلع = ضلع × $\sqrt{\text{٢}}$، العمود الساقط من وسط الدائرة = $\frac{\text{ضلع}\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}}$ ، $|\text{اوع}| = \frac{|\text{اب}| \times \sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}}$

- في المثلث المتساوي الأضلاع الموجود ضمن دائرة شعاعها ش: ضلع المثلث = شعاع × $\sqrt{\text{٣}}$

العمود الساقط من وسط الدائرة على ضلع: $\frac{\text{شعاع}}{\text{٢}}$

ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع بالنسبة للضلع = $\frac{\text{ضلع} \times \sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$

- في السداسي المنتظم الموجود ضمن دائرة: ضلع السداسي = شعاع

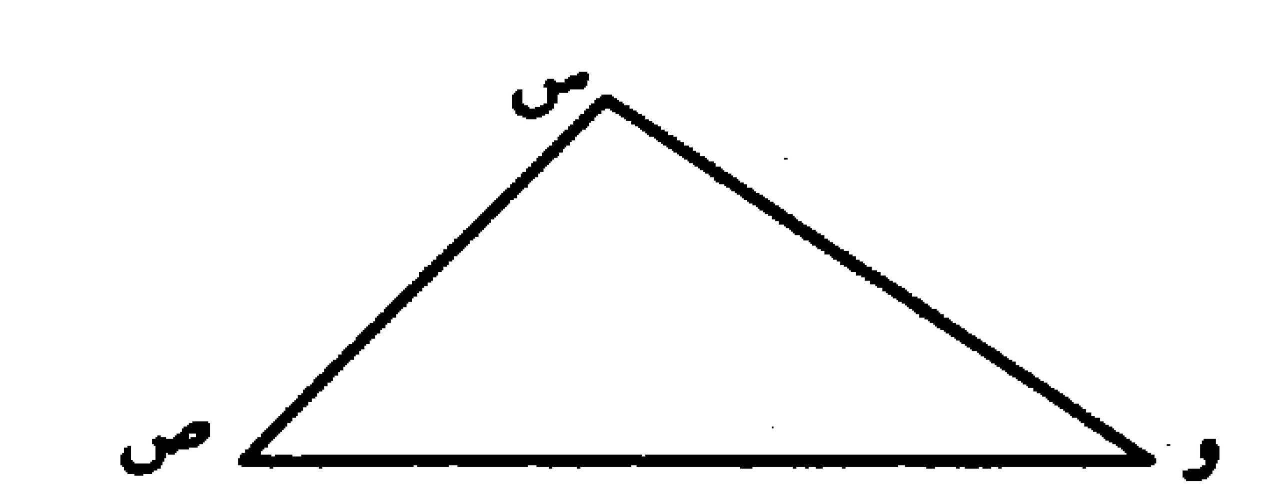


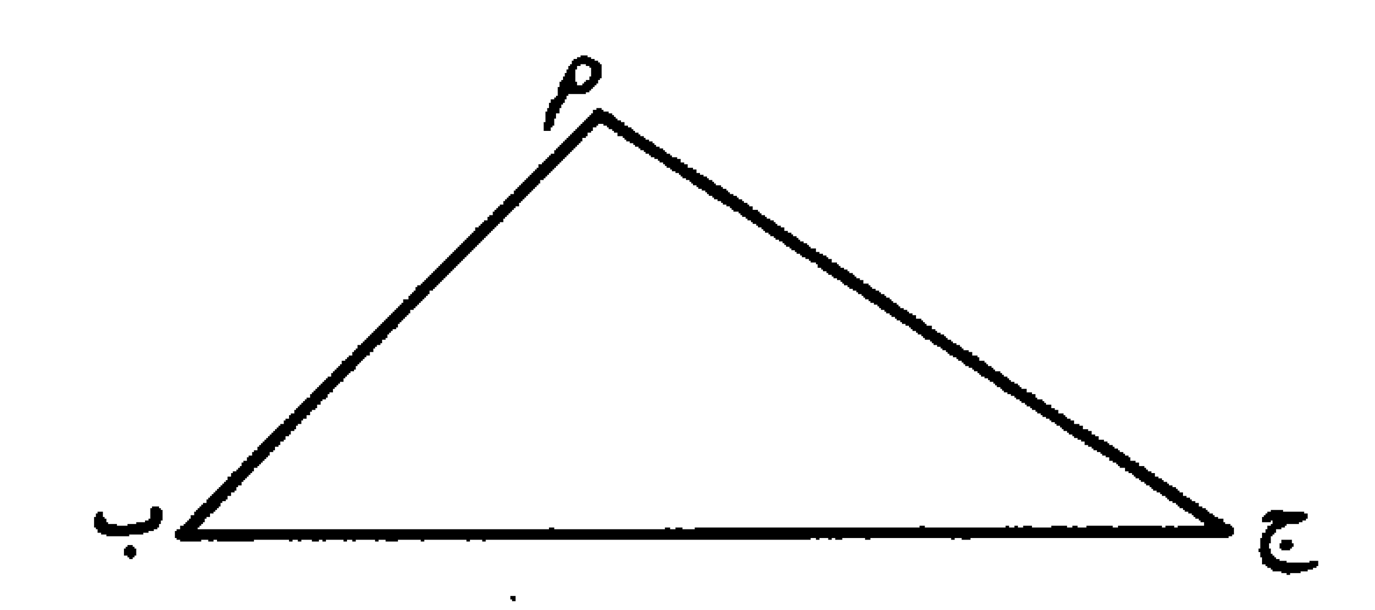
العمود الساقط من مركز الدائرة على ضلع

$|\text{اوع}| = \frac{\text{شعاع} \times \sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$

ـ في المثلثات المتشابهة تكون نسبة المساحات معادلة لمربع نسبة التشابه.

$$\frac{\text{مساحة } \widehat{\text{أ ب ج}}}{\text{مساحة } \widehat{\text{س ص و}}} = \frac{[\text{أ ب}]^2}{[\text{س ص}]^2}$$



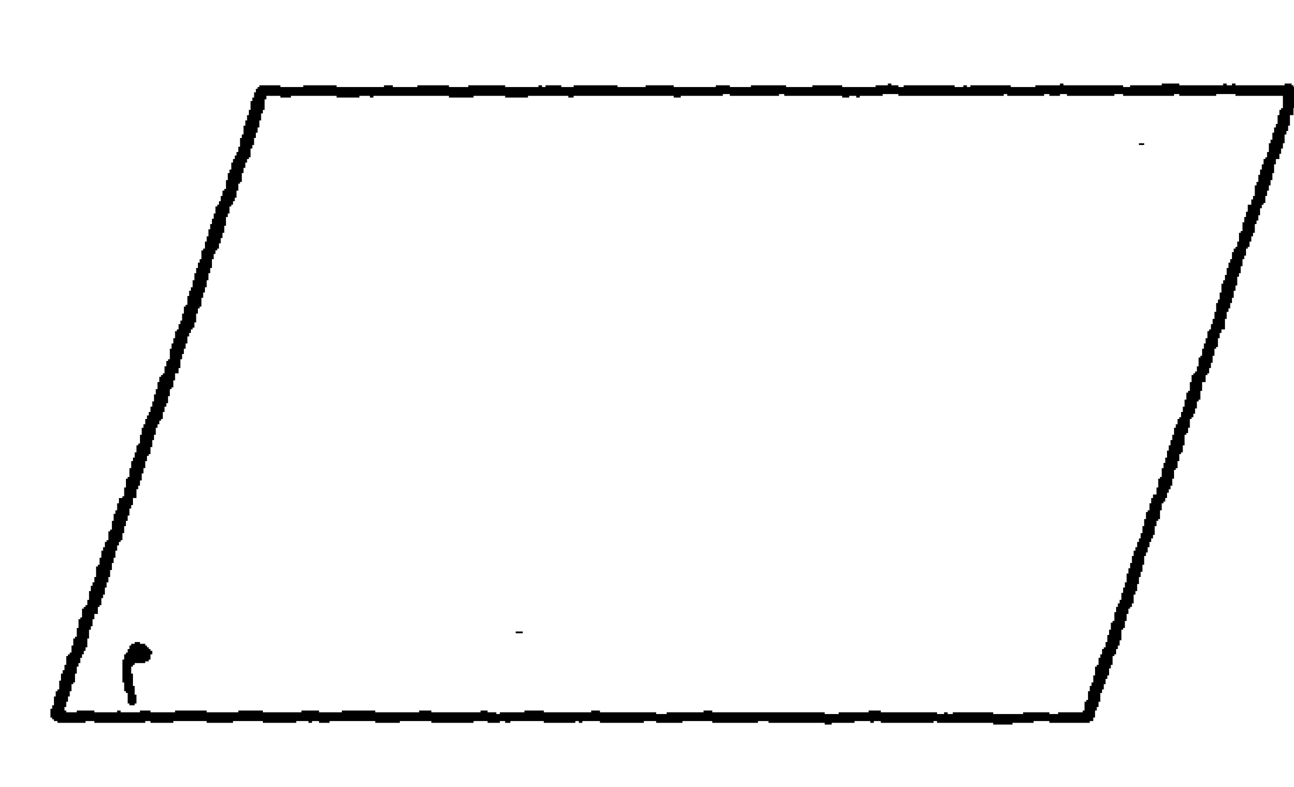


الفصل الرابع عشر

في الهندسة الفراغية

إذا أطلقنا ف على مجموعة النقاط الهندسية المتواجدة أو التي تكون الفراغ الذي نحيا فيه أو الفضاء... أو الكون... يكون معنا بالتحديد.

- يكون المسطح م مجموعة جزئية من ف بحيث إن كل مستقيم يمر بنقطتين أ وَ ب من م، يكون هذا المستقيم محتوى بكامله في م.



بعض المسلمات:

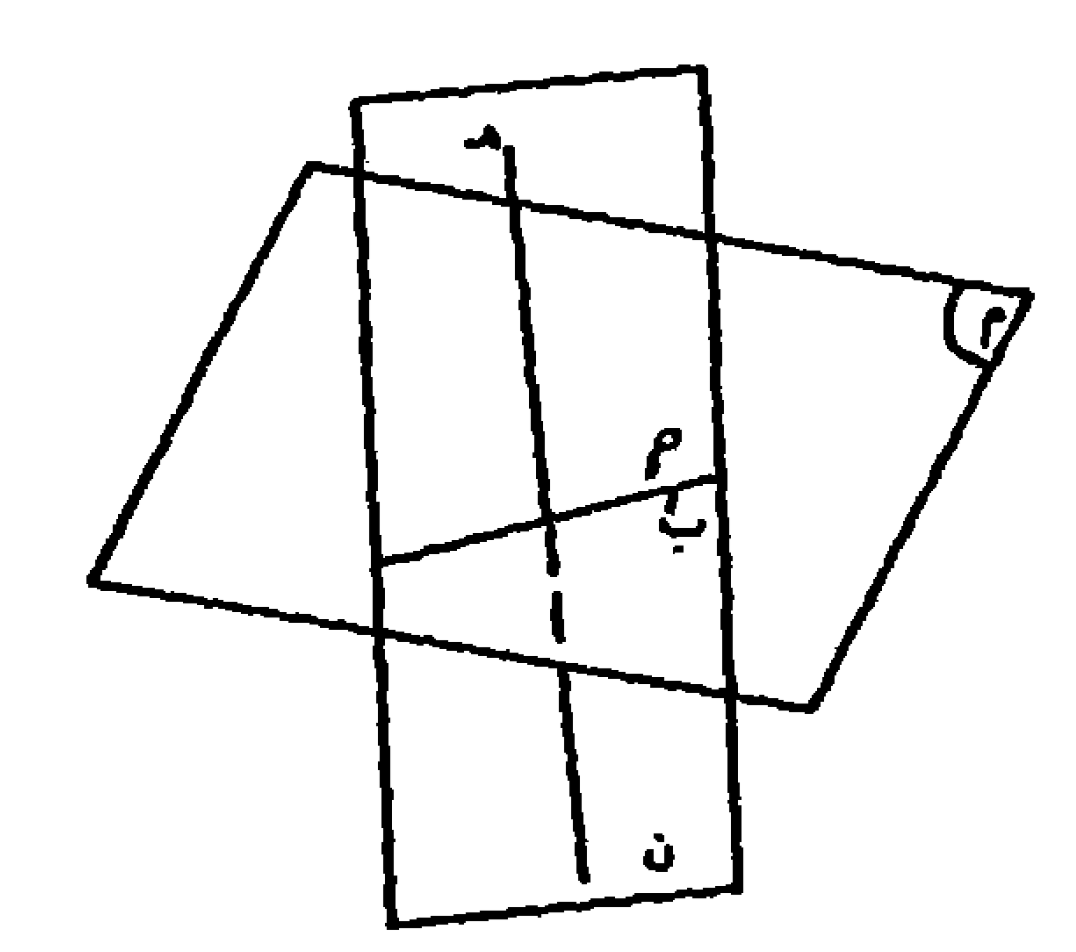
١ ـ يحدِّد المسطح م في الفراغ ف جزئين ف١ وَ ف٢ بحيث أن الخط الذي يجمع نقطتين (نقطة من كل نصف فراغ) يمر حكماً في المسطح م.

٢ ـ من خط معيّن يمكننا رسم عدد لا متناه من المسطحات يكون هذا الخط مشتركاً بينهما.

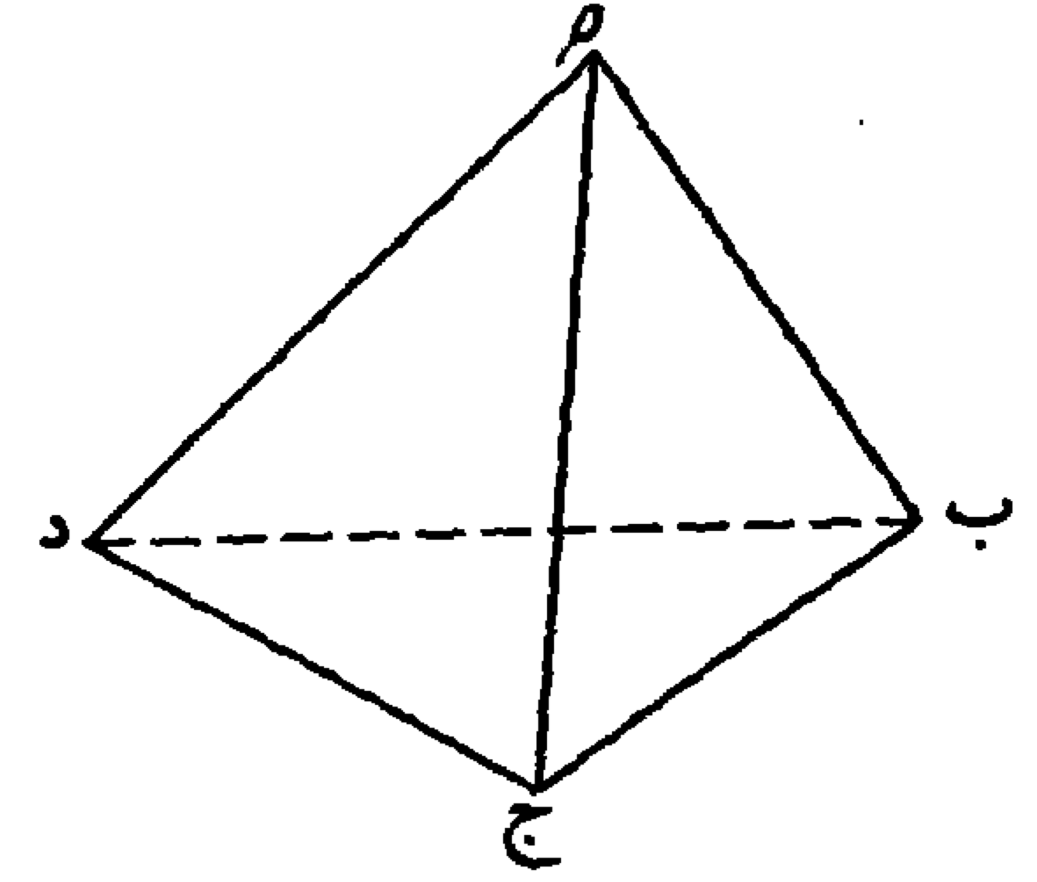
٣ ـ من ثلاث نقاط غير مستقيمة يمكننا أن نرسم مسطحاً واحداً لا غير.

٤ ـ كل خط مستقيم يُرسم داخل مسطح يقسم هذا المسطح إلى قسمين م١ و م٢

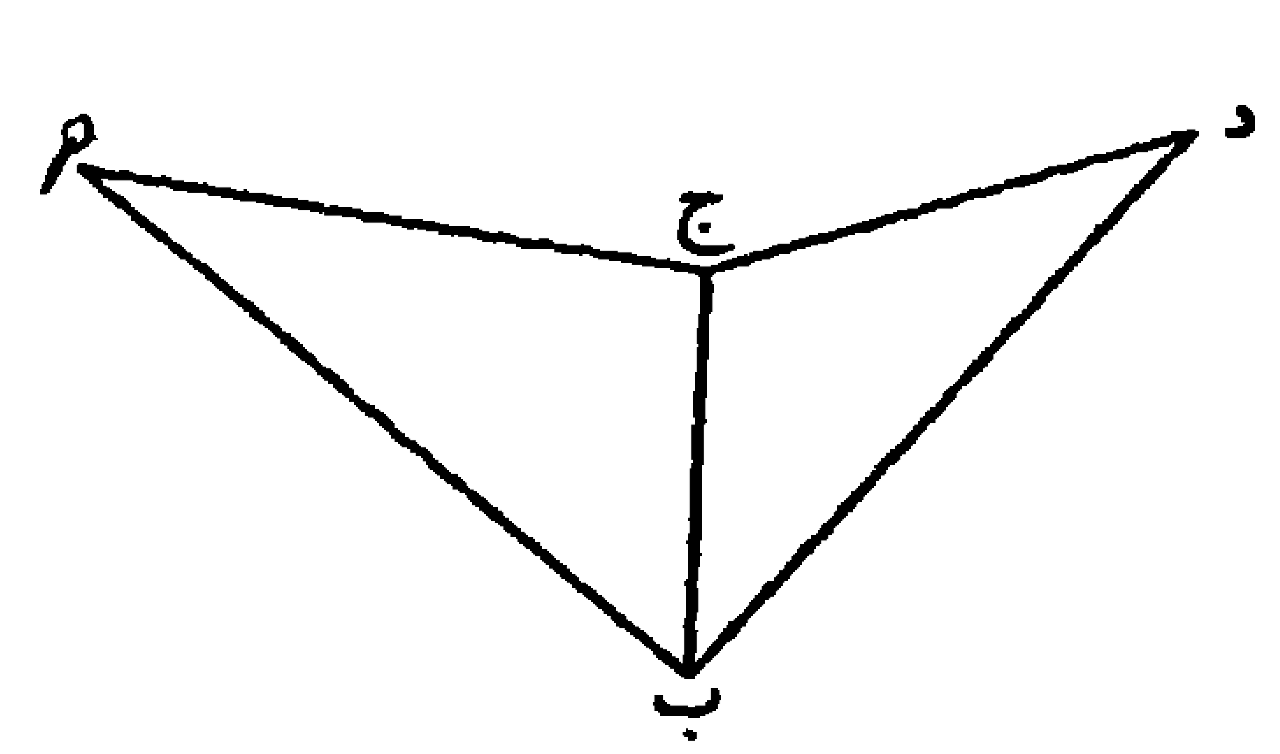
- يتحدَّد مسطح بواسطة مستقيمين يتلاقيان.
- يتحدَّد مسطح بواسطة خط مستقيم ونقطة غير موجودة على هذا الخط.
- إذا كان لمسطحين متمايزين نقطة مشتركة فيكون لهما خطاً مشتركاً واحداً يمر بهذه النقطة.



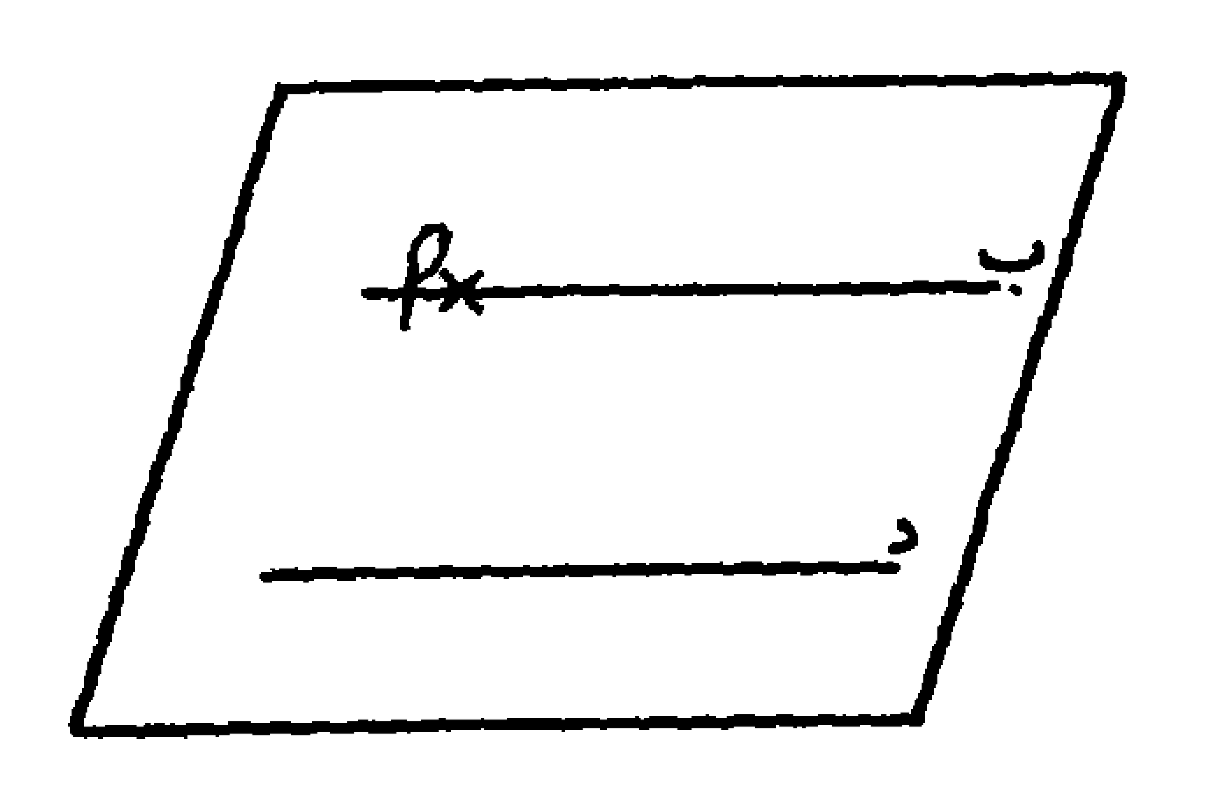
- يكوّن تقاطع مسطّحين متوازيين المجموعة الخالية.
- رباعي الوجوه هو جسم صلب تحده أربع جهات مثلثية يكون بين كل زوج منها خطاً مشتركاً.



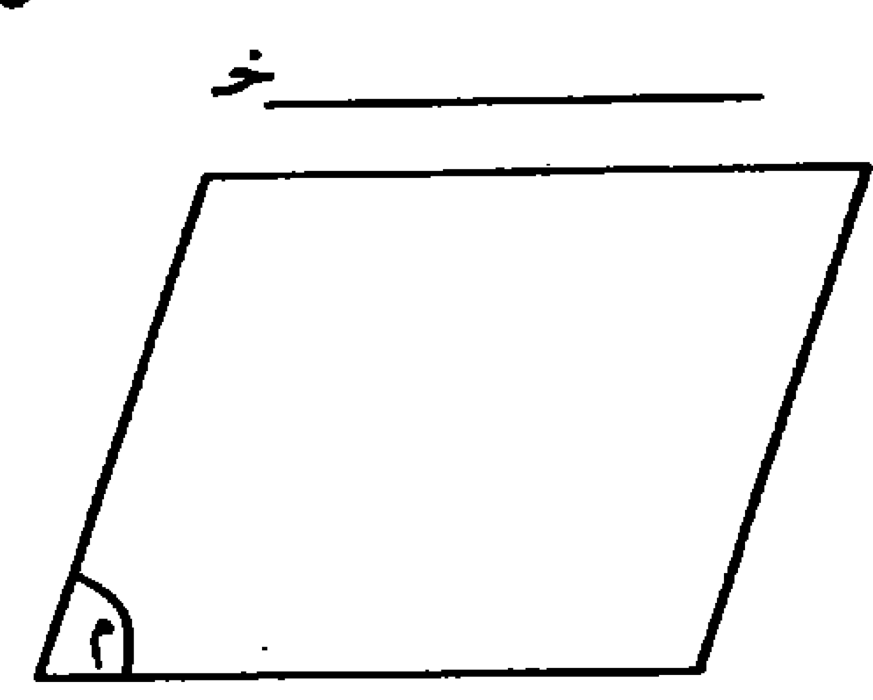
- يقال عن رباعي إنه يساري إذا تكوَّن من مثلثين غير موجودين في مسطح واحد ولهما ضلع مشترك.
انظر الشكل المقابل



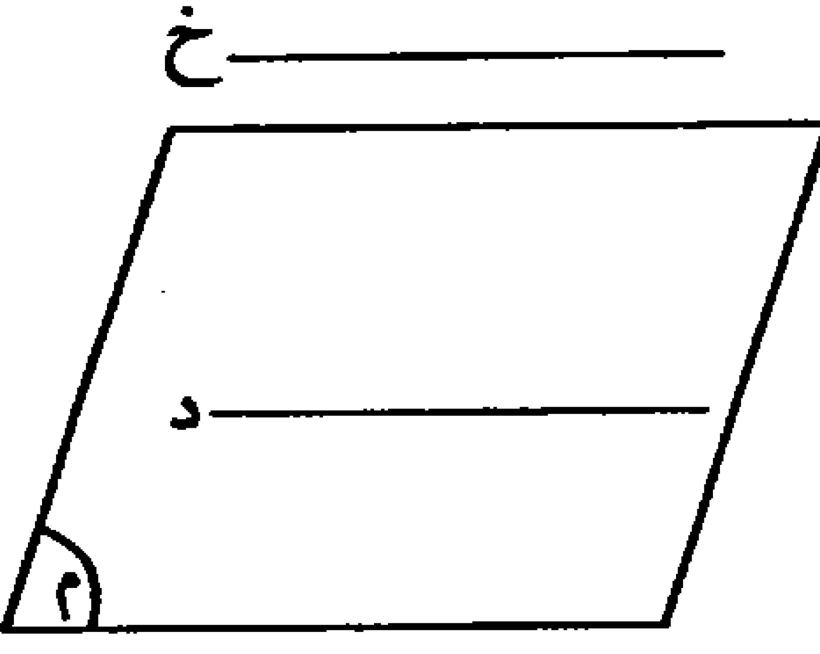
- تعريف الخطوط المتوازية في الفراغ.
يكون خطان متوازيين في الفراغ إذا كانا في المسطح نفسه وليس عندهما نقطة تقاطع.



- **من نقطة خارج خط معين يمكننا أن نرسم خطاً موازياً على هذا الخط.**
- **يحدد خطان متوازيان متمايزان مسطحاً وحيداً.**
- **كل مسطح يقطع خطاً موازياً لخط آخر يقطع أيضاً الخط الثاني.**
- **إذا كان معنا خطان موازيان لخط ثالث فإنهما يكونان متوازيين بينهما.**
- **الزوايا التي تكون خطوطها متوازية وبالاتجاه نفسه تكون متطابقة.**

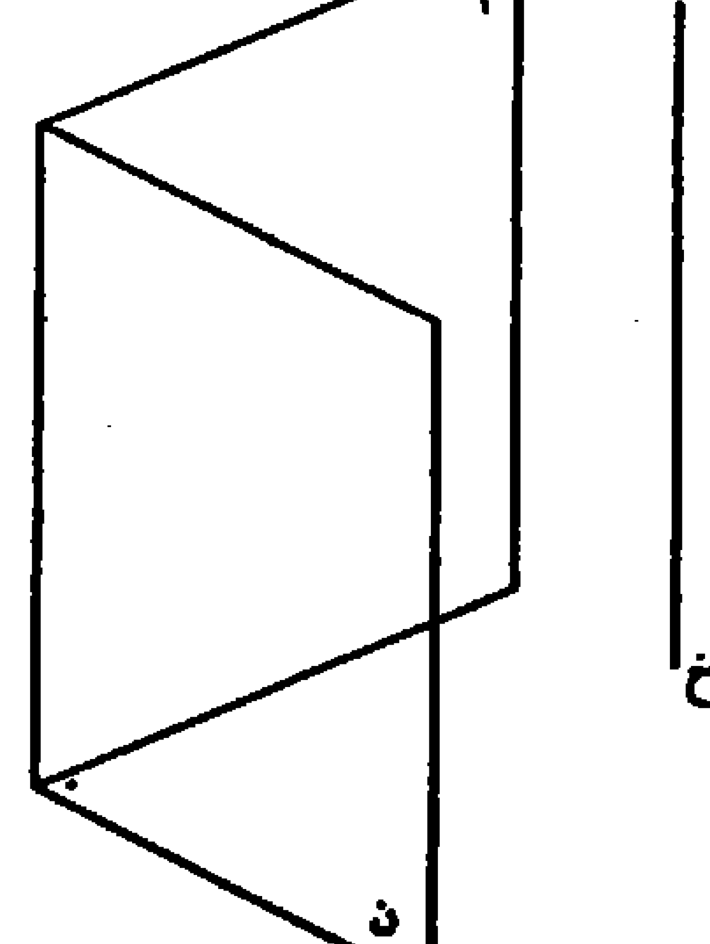


- يكون الخط خ موازياً للمسطح م إذا لم يكن عندهما أية نقطة مشتركة.
- إذا كان الخط خ موازياً لخط د موجود في المسطح م فإن الخط خ يكون موازياً للمسطح م.



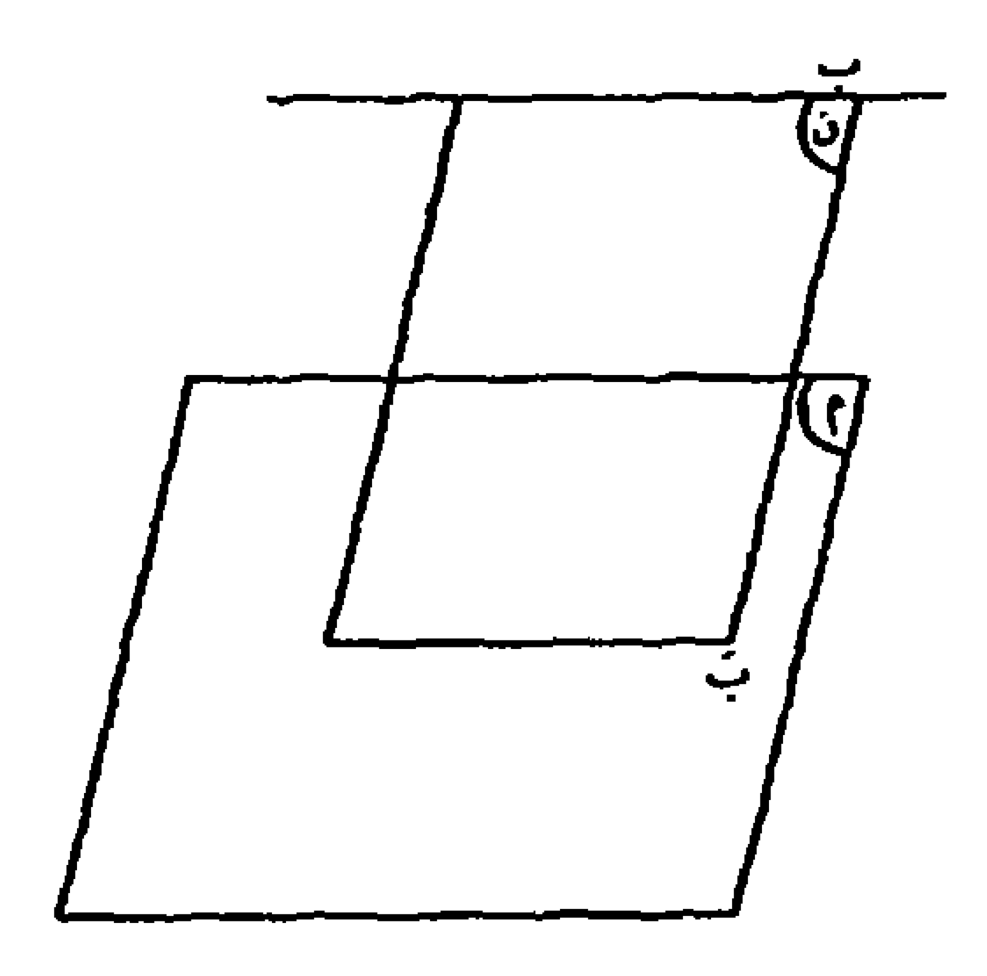
- إذا كان الخط خ موازياً للمسطح م، كل مسطح يمر بالخطوط ويقطع المسطح م، يقطعه وفقاً لخط د موازٍ لـ خ.
- كي يكون الخط خ موازياً للمسطح يجب ويكفي أن يكون الخط خ موازياً لخط واحد من هذا المسطح.

- إذا كان الخط خ موازياً للمسطح م، وفي حال رسمنا من نقطة من م خطاً موازياً للخط خ، هذا الخط الأخير يكون كله في المسطح م.
- إذا كان الخط خ موازياً لمسطحين متقاطعين يكون موازياً لخط تقاطعهما.



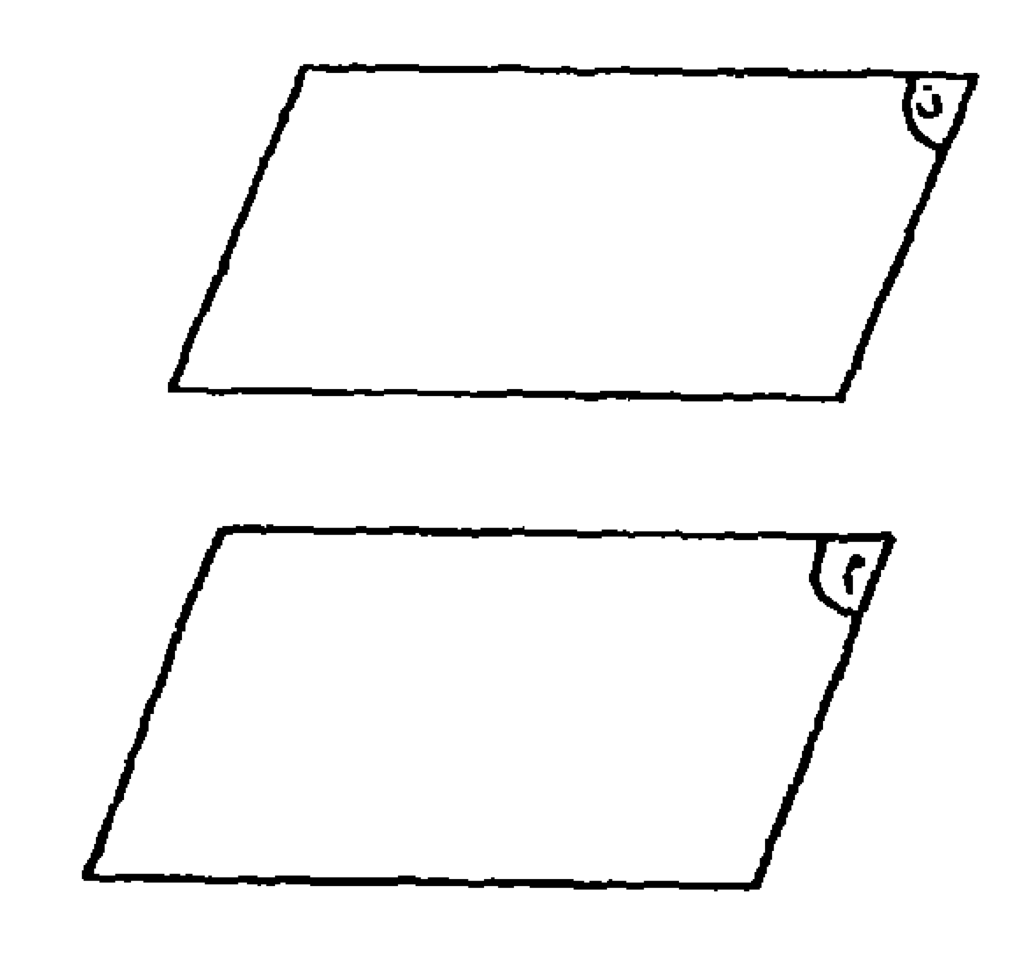
- من نقطة معينة ويمكننا أن نرسم مسطحاً واحداً موازياً على خطين متقاطعين.

- إن القطع المستقيمة المتوازية المحصورة بين خط وسطح مواز لها، تكون متطابقة.



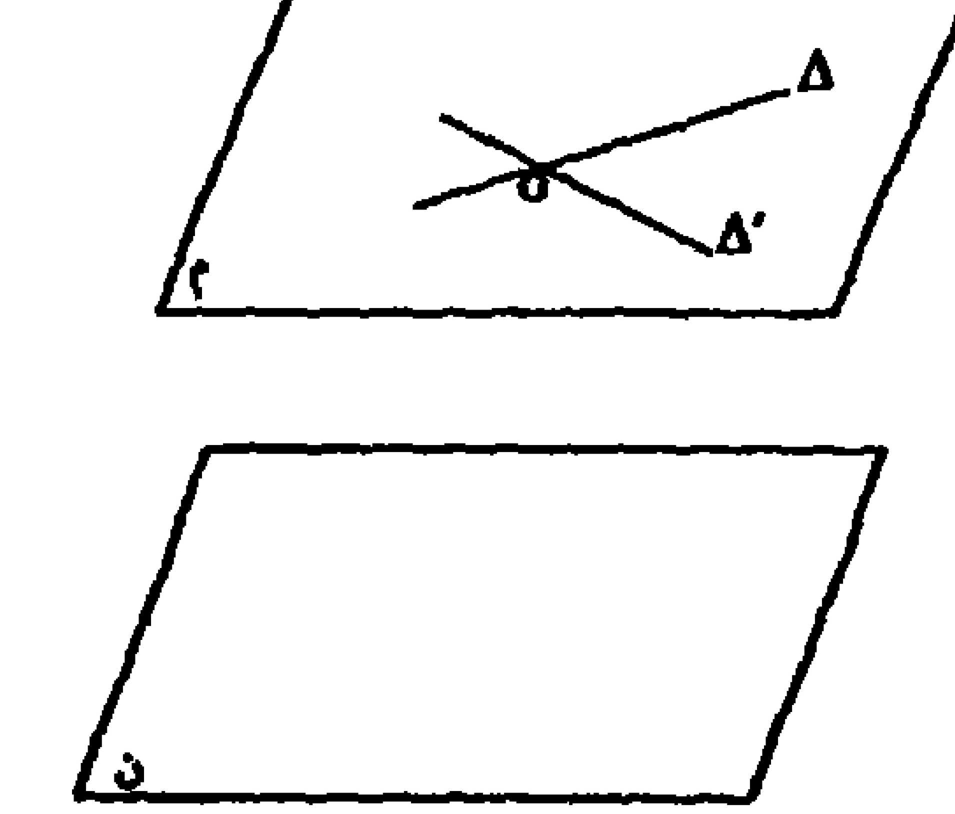
- من خط معين $د_1$ يمكننا أن نرسم مسطحاً وحيداً موازياً لخط آخر $د_2$ غير موازٍ للخط $د_1$

- يكون مسطحان متوازيين إذا لم يكن لهما أية نقطة مشتركة. يمكن اختصار الكتابة بالرمز التالي م // ن $\Leftrightarrow$ م $\cap$ ن $= \phi$.

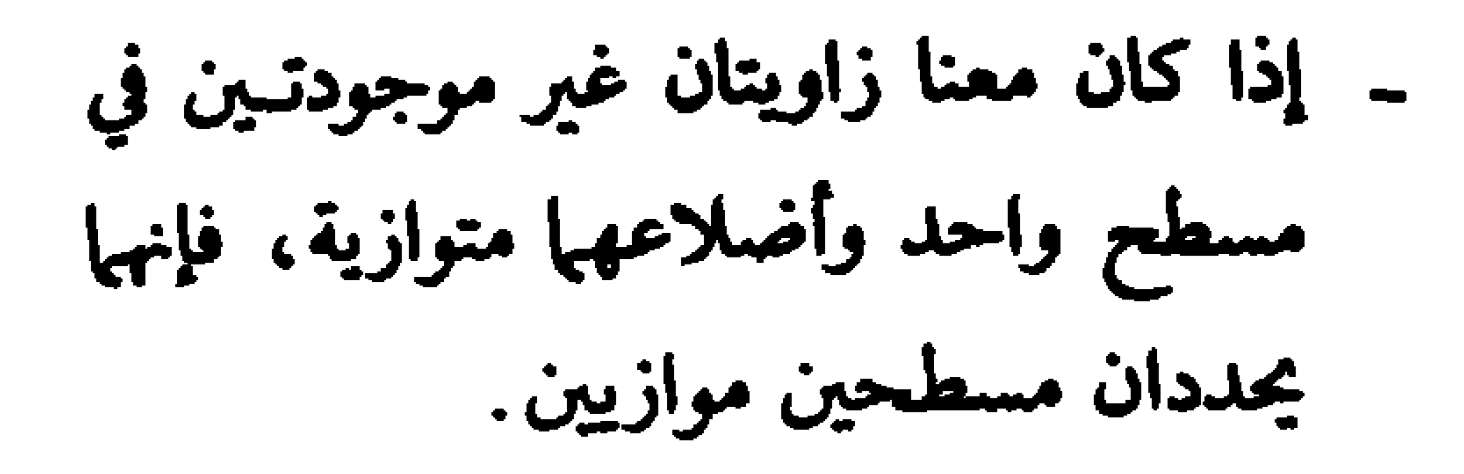


- إذا كان معنا قسمان متوازيان، كل خط يرسم في المسطح الأول يكون موازياً للمسطح الآخر.

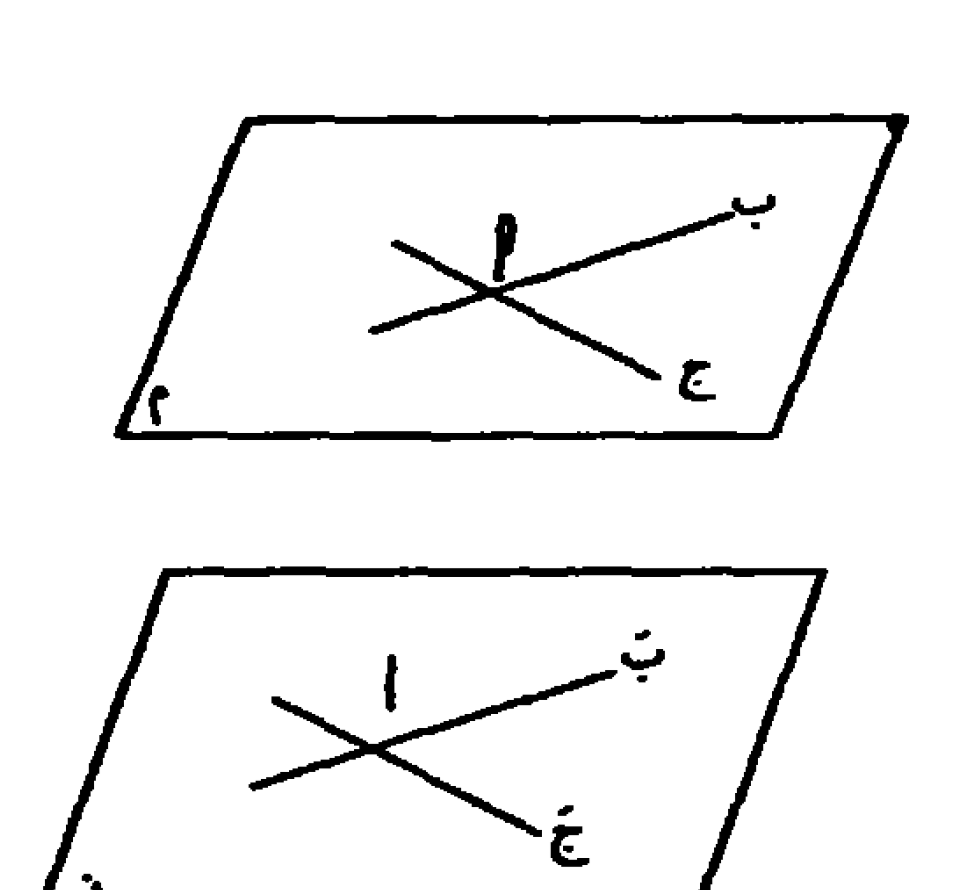
- إذا احتوى مسطح على خطين متقاطعين موازيين لمسطح ن، فإن المسطحين م وَ ن يكونان متوازيين.



كي يكون مسطحان متوازيين، يجب ويكفي أن يحتوي أحدهما خطين متقاطعينَ موازيين للآخر.



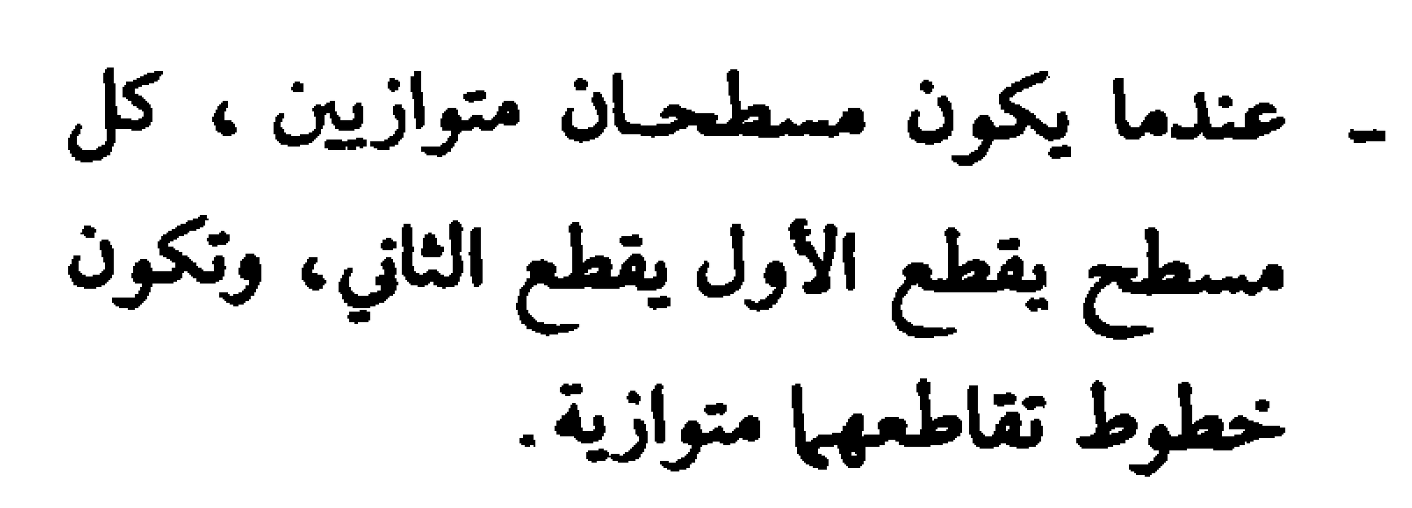
- إذا كان معنا زاويتان غير موجودتين في مسطح واحد وأضلاعهما متوازية، فإنهما يحددان مسطحين موازيين.



- من نقطة أ لا تنتمي للمسطح م يمكننا رسم مسطح واحد مواز للمسطح م.

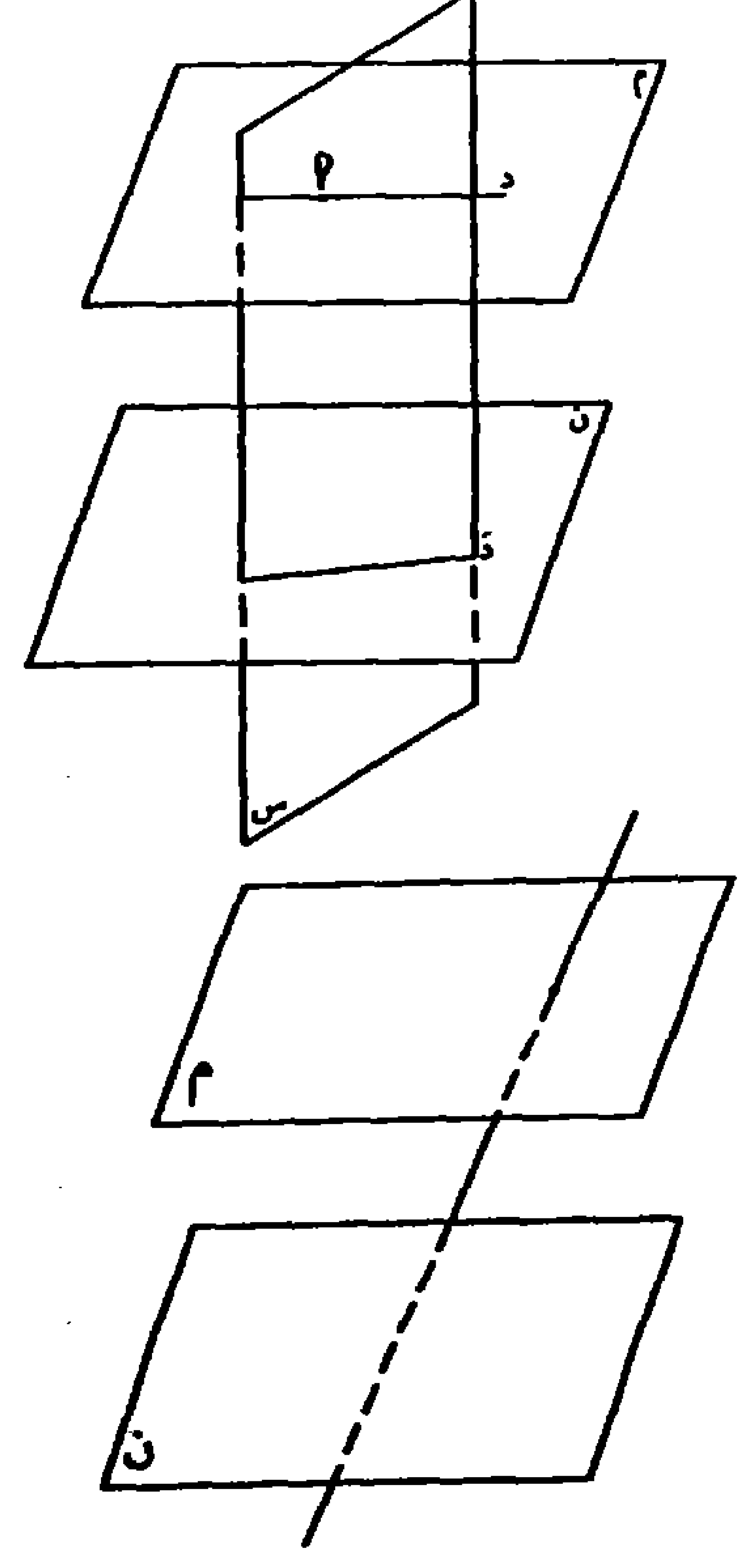
- إن مجموعة الخطوط التي تحتوي على نقطة أ وموازية للمسطح م، هو المسطح ن الذي يحتوي أ ومواز للمسطح م.

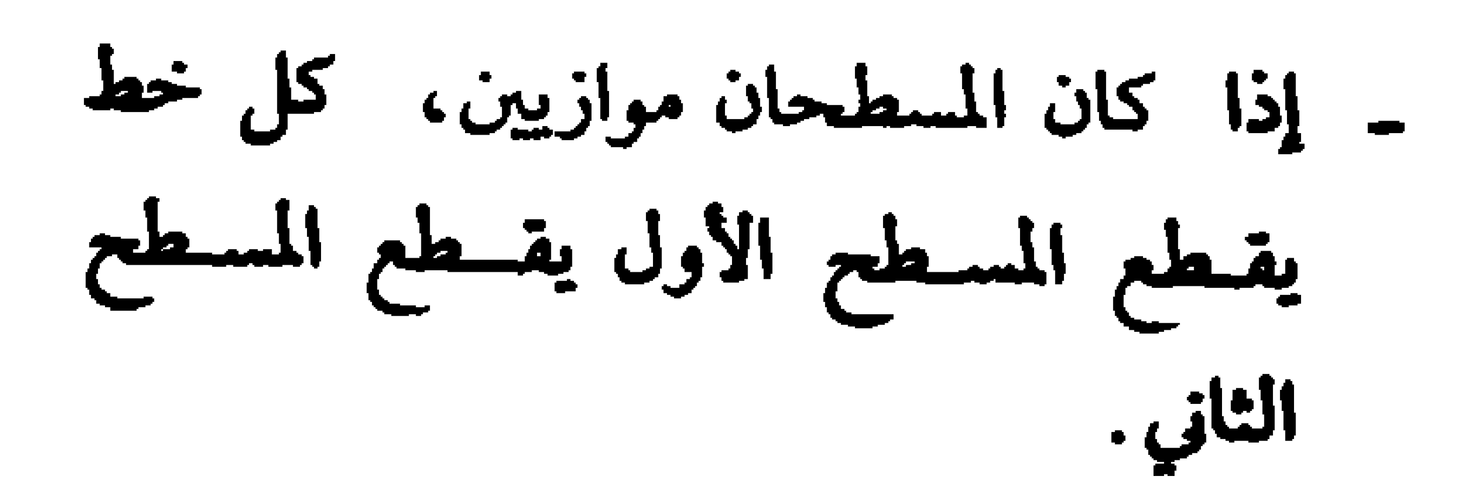
- كل مسطحان موازيان لمسطح ثالث يصبحان متوازيين فيما بينهما.



- عندما يكون مسطحان متوازيين، كل مسطح يقطع الأول يقطع الثاني، وتكون خطوط تقاطعهما متوازية.

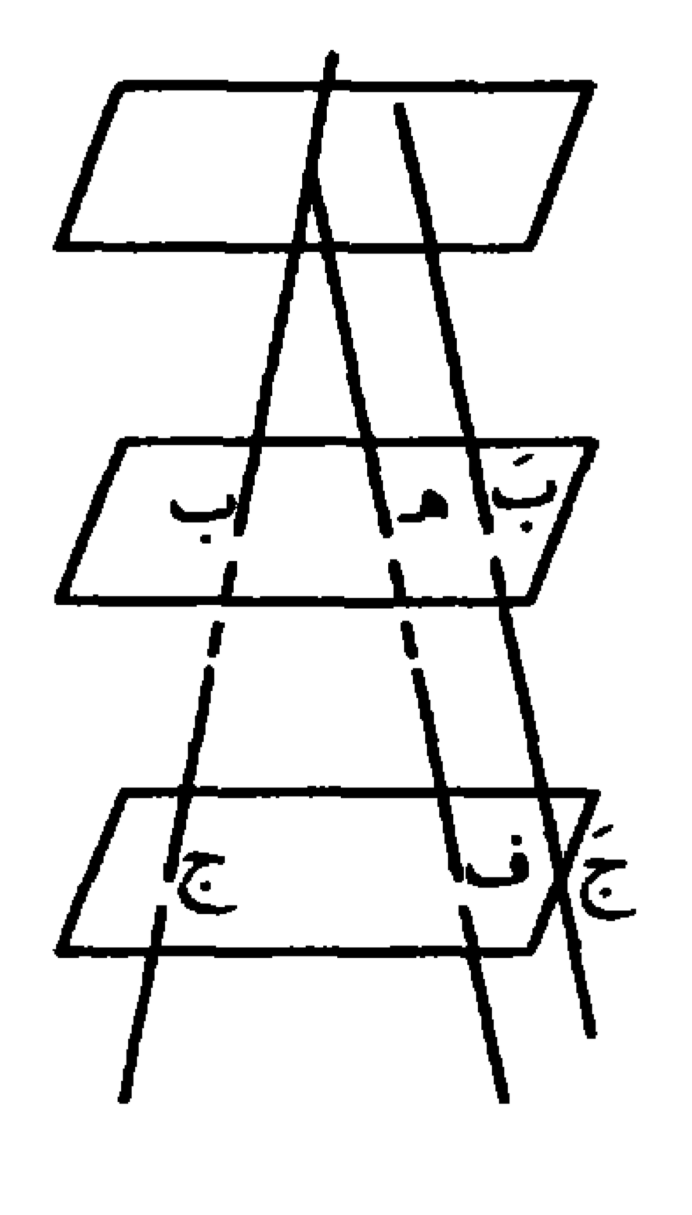
- تكون القطعتان المستقيمتان المتوازيتان المحددة بمسطحين متوازيين متطابقتين.





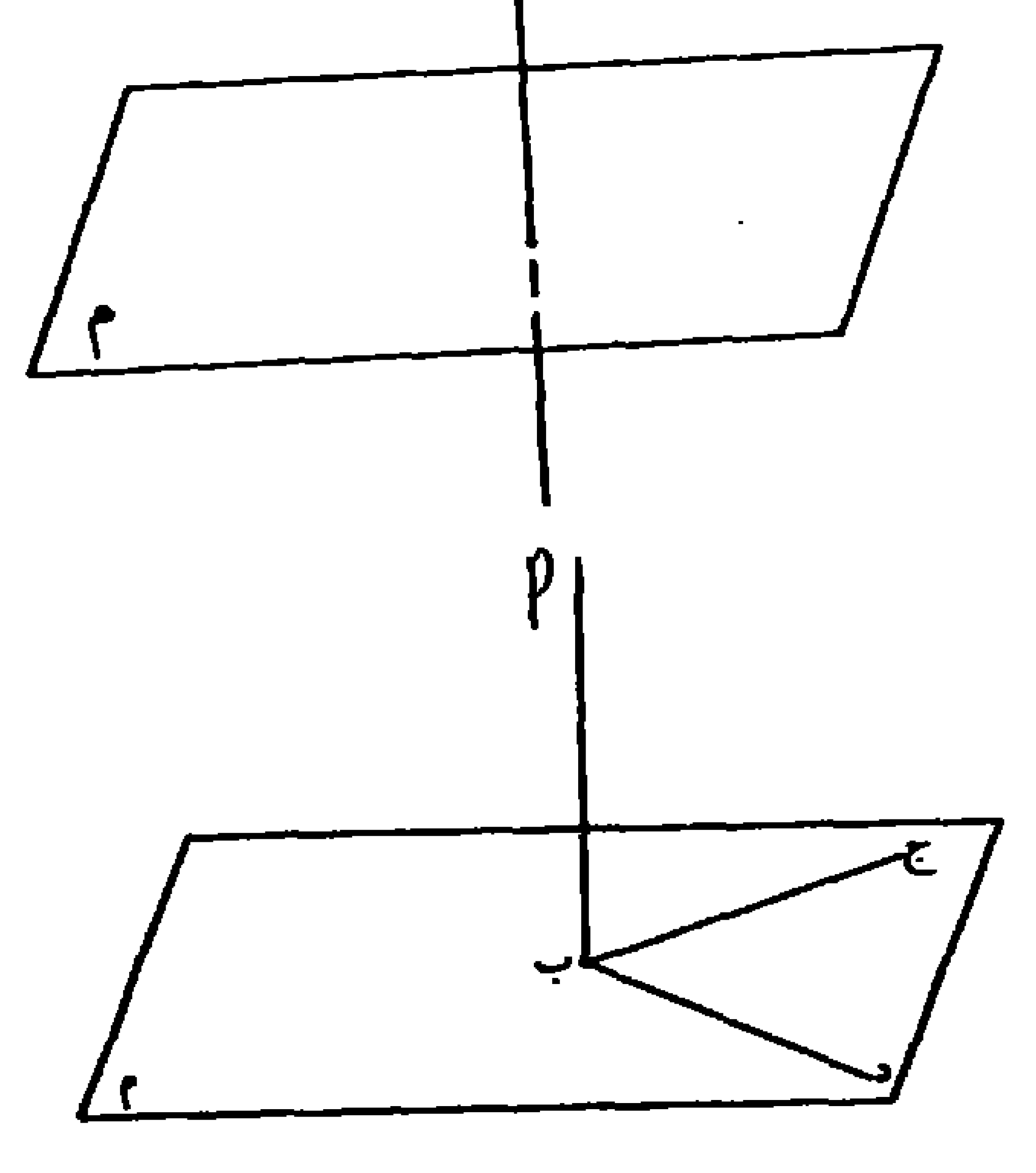
- إذا كان المسطحان موازيين، كل خط يقطع المسطح الأول يقطع المسطح الثاني.

- إذا كان مسطحان متوازيين، كل خط مواز لإحدهما يكون موازياً للآخر أو محتوياً في الآخر.



- تحدِّد مسطحات متوازية على خطين معينين قطع مستقيمة متناسبة.

- عكسياً: إذا انقسمت خطوط إلى قطع مستقيمة متناسبة فإن النقاط التي تجمع نقاط التقسيم المتقابلة تتواجد في مسطحات متوازية.



- يقال عن خط إنه عمودي على مسطح إذا كان عمودياً على كل خطوط هذا المسطح.

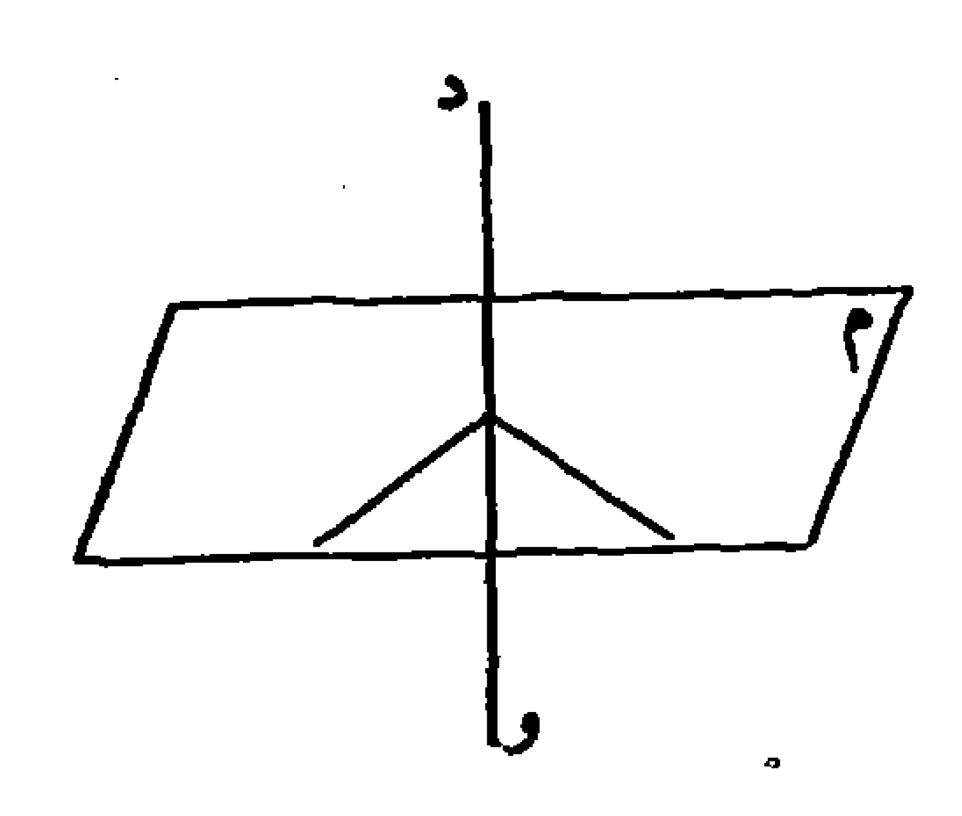
- إذا كان الخط أب عمودياً على خطين من المسطح م، يكون الخط أب عمودياً على المسطح م.

- لكي يكون خط مستقيم عمودياً على مسطح، يجب ويكفي أن يكون هذا الخط عمودياً على مستقيمين من هذا المسطح.

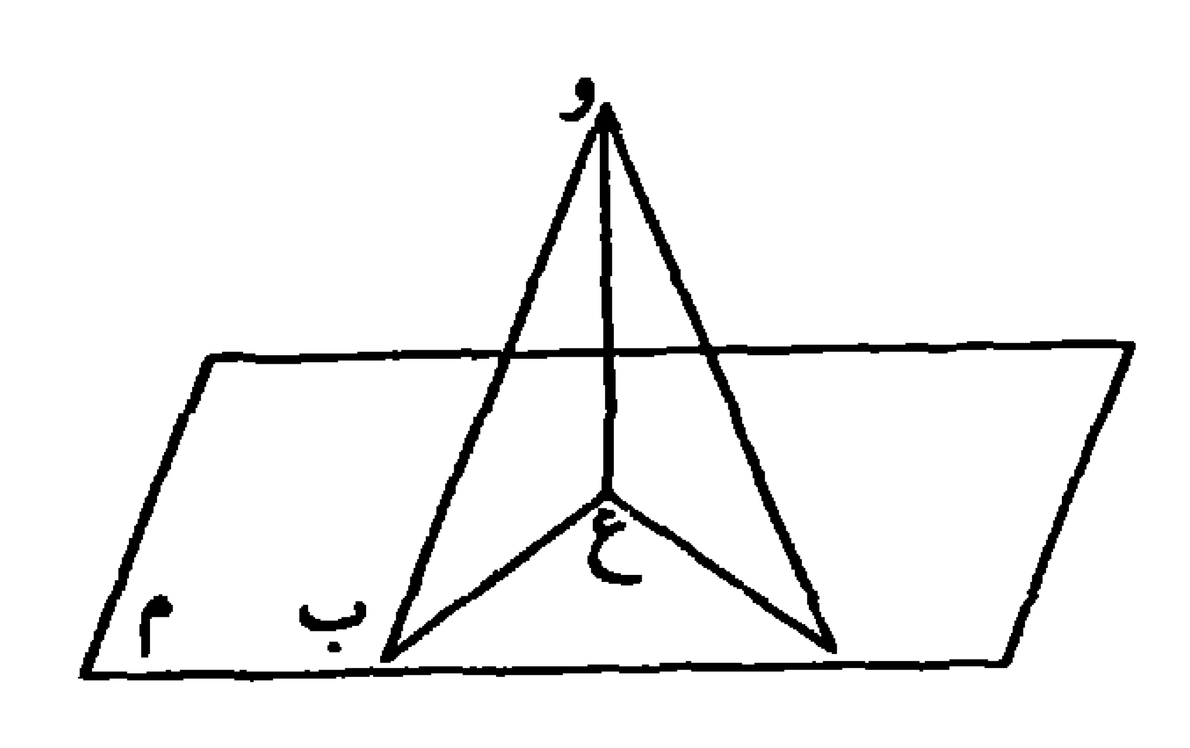
- إذا كان معنا مسطحان متوازيان، كل مسطح ثالث عمودي على إحدهما يكون عمودياً على الآخر.

- إذا كان معنا مسطحان متوازيان. كل خط عمودي على إحدهما يكون عمودياً على الآخر.

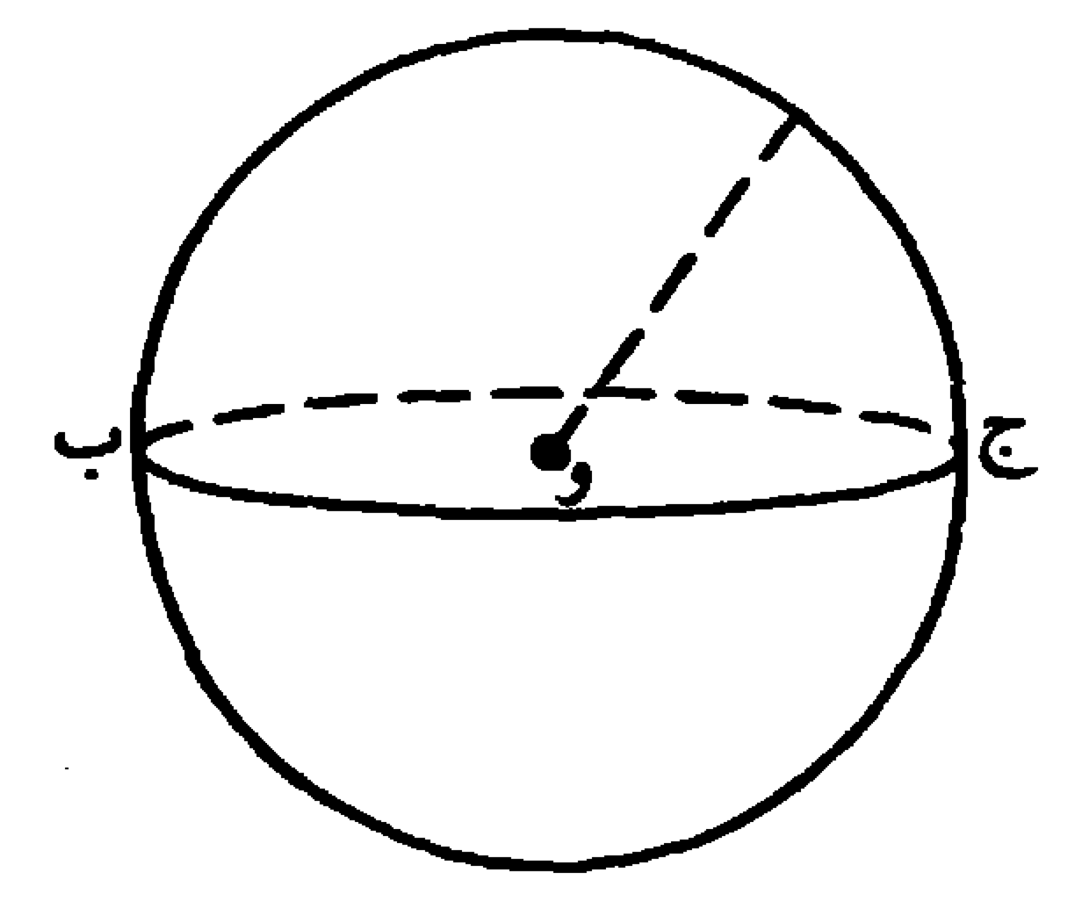
- من نقـطة معينة و يمكننا رسم مسـطح واحد عمودي على مستقيم معطى د.



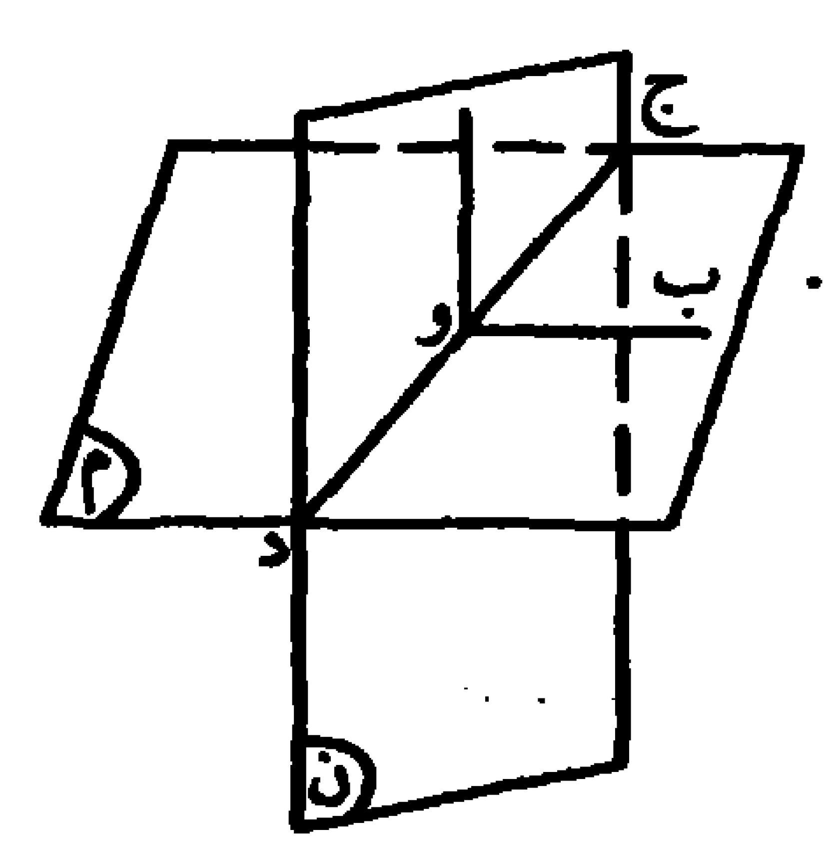
- من نقطة معينة و، يمكننا رسم مستقيم واحد عمودي على مسطح معين م.



- إن طول المستقيم العمودي على مسطح معين من نقطة خارج هذا المسـطح هو أقصر من كل مستقيم منحرف على هذا المسطح منطلقة من النقطة نفسها.



- الكرة؛ مركـزها و وشعـاعها ش، هي مجمـوعـة كـل النقـاط من الفـراغ ف الموجودة على المسافة ش من المركز و.

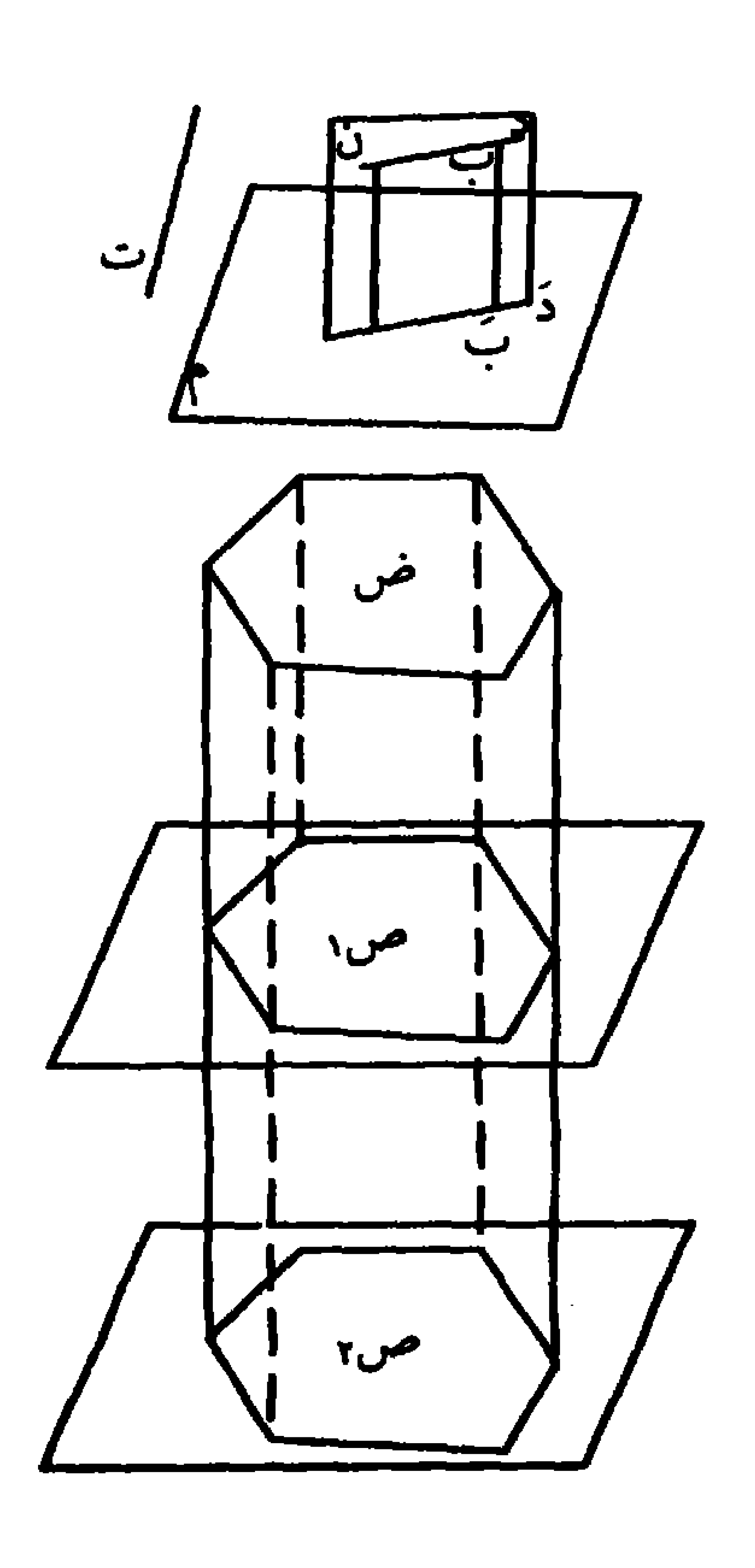


- كل مستقيم يمر في مركز الكرة هو محور تناظر لهذه الكرة.
- كل مسطح يمر في وسط الكرة هو مسطح تناظر لهذه الكرة.

- يكـون مسطحـان عموديين إذا احتوى أحدهما مستقياً عمودياً على الآخر.

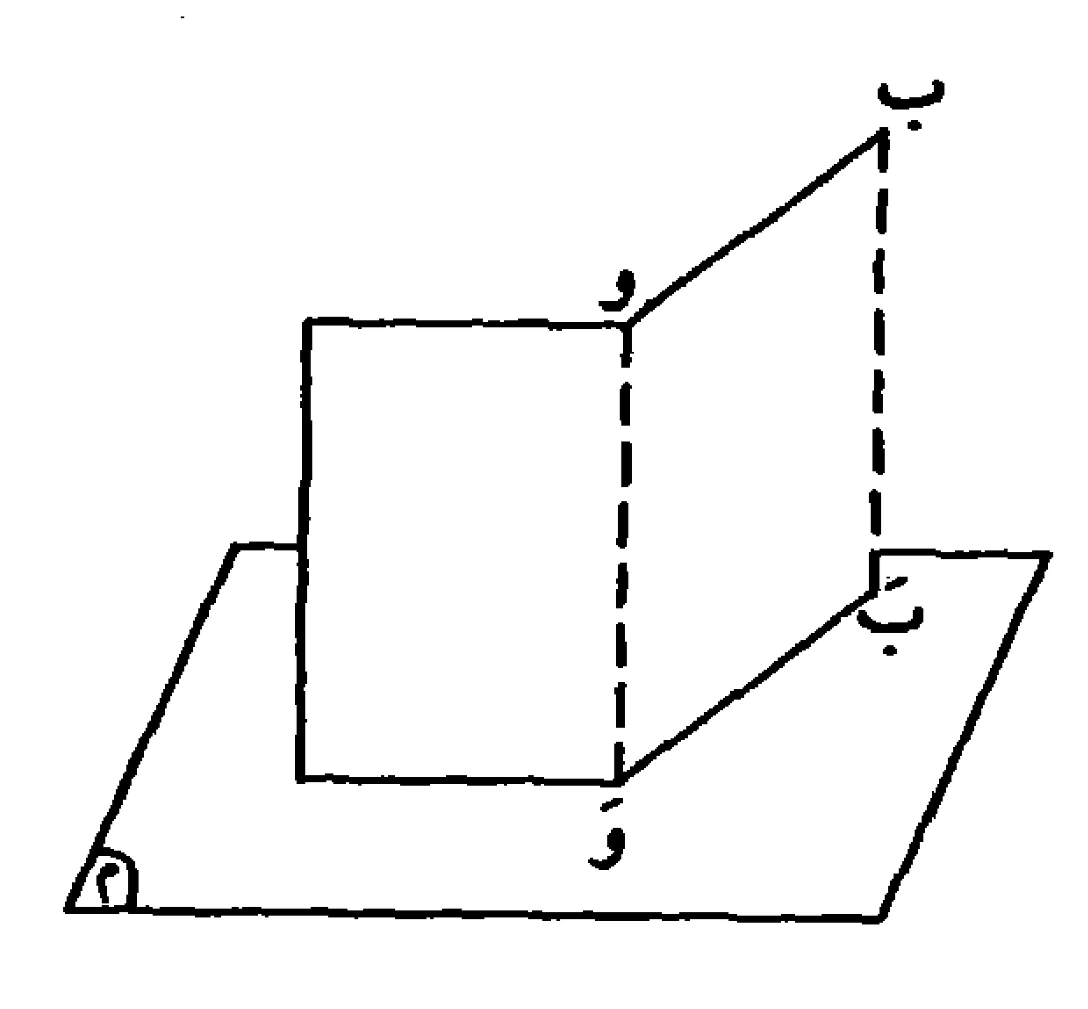
- الشرط الضروري: إذا كان المسطحان م
وَ ن عموديين، يحتوي أحـدهما مستقيماً
عمودياً على الآخر.

- الشرط الكافي: إذا كان مستقيم أ و عمودياً على المسطح م، كل مسطح ن يمر بهذا المستقيم يكون عمودياً على ن.
- إذا كان معنا مسطحان عموديان، كل خط مستقيم يرسم في أحدهما عمودياً على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المسطح الآخر.
- عندما يكون مسطحان متقاطعان عموديين على مسطح ثالث فإن خط تقاطعهما يكون عمودياً على المسطح الثالث.



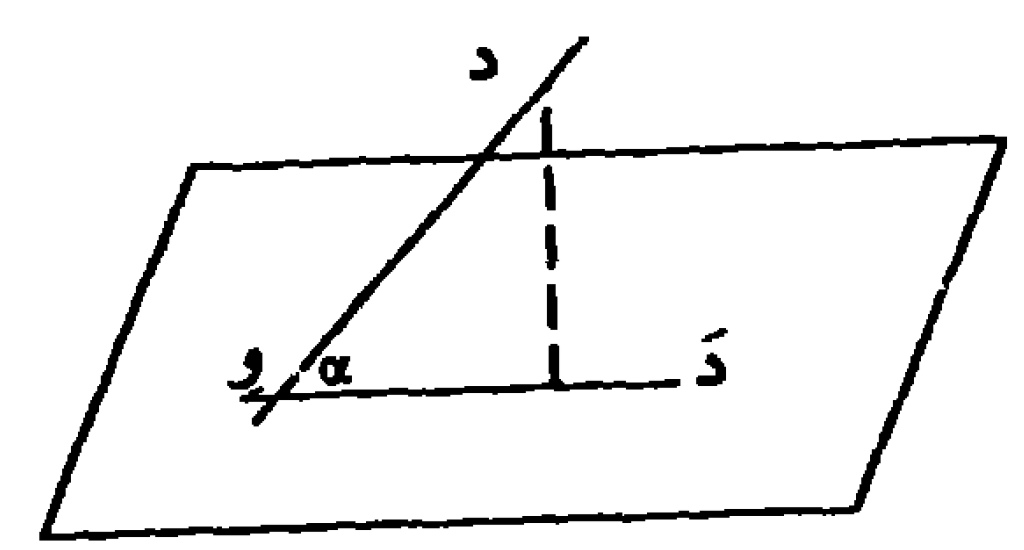
- إن إسقاط مستقيم د على مسطح م، بشكل متواز على اتجاه معين ت، هو بشكل عام مستقيم د'
- إن إسقاطات مضلع مسطح على مسطحين متوازيين تكون متطابقة. ص١ = ص٢.
- لكي تسقط زاوية قائمة، ليس عندها ضلع عمودي على مسطح م بشكل عمودي على هذا المسطح وفقاً لزاوية قائمة، يجب ويكفي أن تكون إحدى جهاتها على الأقل موازية على م أو محتواة في هذا المسطح.

- الشرط الضروري: إذا تساقطت زاوية قائمة عمودياً على مسطح م وفقاً لزاوية قائمة، يجب أن تكون إحدى جهاتها على الأقل موازية للمسطح م أو محتواة فيه.



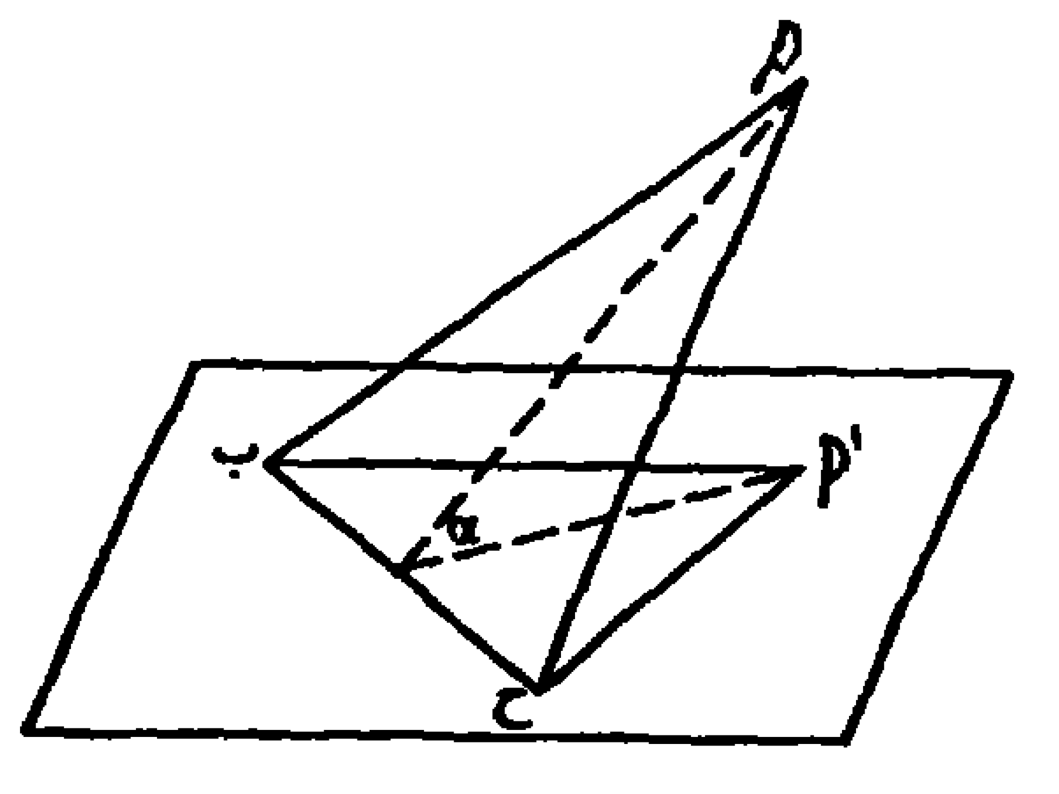
- الشرط الكافي: إذا كان لزاوية مستقيمة جهة موازية لمسطح م أو محتواة فيه والجهة الأخرى غير عمودية على هذا المسطح، فإنها تسقط عمودياً على م وفقاً لزاوية قائمة.

- عكسياً: عندما نسقط زاوية عندها جهة موازية لمسطح م، أو محتواة فيه عمودياً وفقاً لزاوية قائمة تكون هي الأولى زاوية قائمة.



- يطلق مفهوم زاوية بين مستقيم ومسطح الزاوية الحادة التي يكونها هذا المسقيم مع إسقاطه العمودي على المسطح.

- إذا تقاطع مسطحان م وَ ن، أن مستقيات المسطح Φ العمودية على تقاطع م مع ن تشكل الزاوية الأكبر مع م.
- إن المستقيات في المسطح ن العمودية على خط التقاطع بين المسطحين تعرف تحت اسم مستقيات أكبر هبوط من ن بالنسبة إلى م.



- إن مساحة الإسقاط لمضّلع مسطّح على مسطح معين، تعادل حاصل ضرب مساحة هذا المضلع في جيب التمام للزاوية التي يكونها مسطّح المضلع مع مسطّح الإسقاط.

الفصل الخامس عشر

العمود المشترك

- يطلق تعبير العمود المشترك لمستقيمين في الفراغ، المستقيم الذي يقطعهما مشكلاً زاوية قائمة.
- لمستقيمين غير موجودين في مسطح واحد عمود مشترك واحد. إن قطعة المستقيم المحددة بهذين المستقيمين على عمودهما المشترك هي أقصر قطعة تصل نقطة من الأول مع نقطة من الآخر.

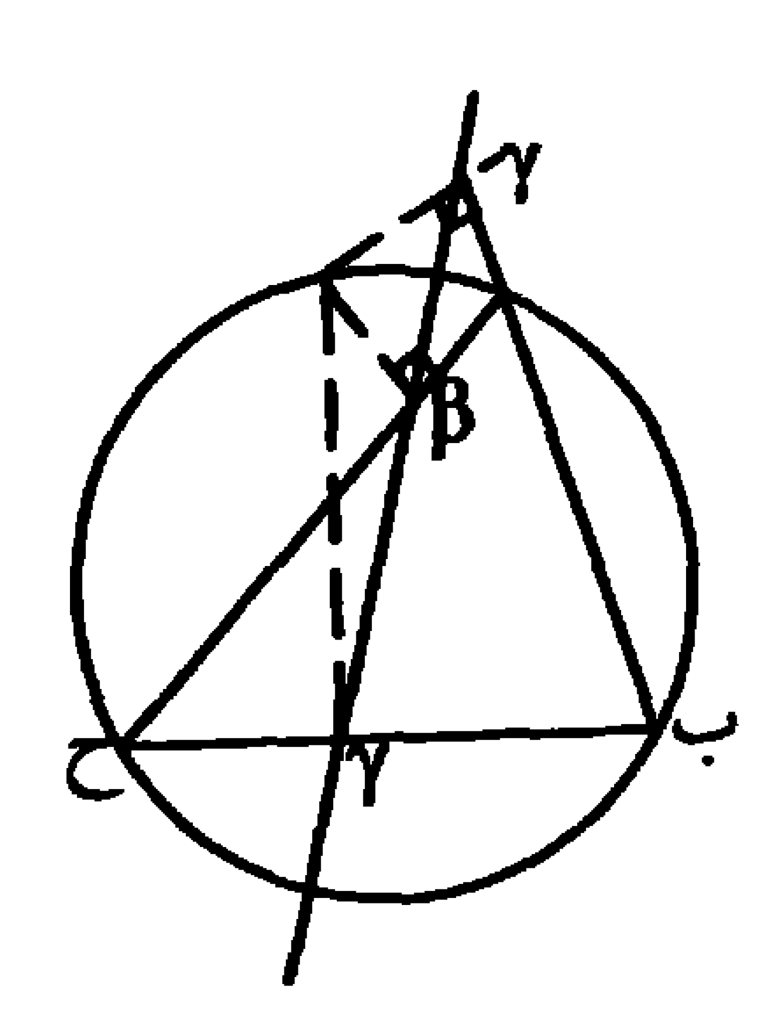
الفصل السادس عشر

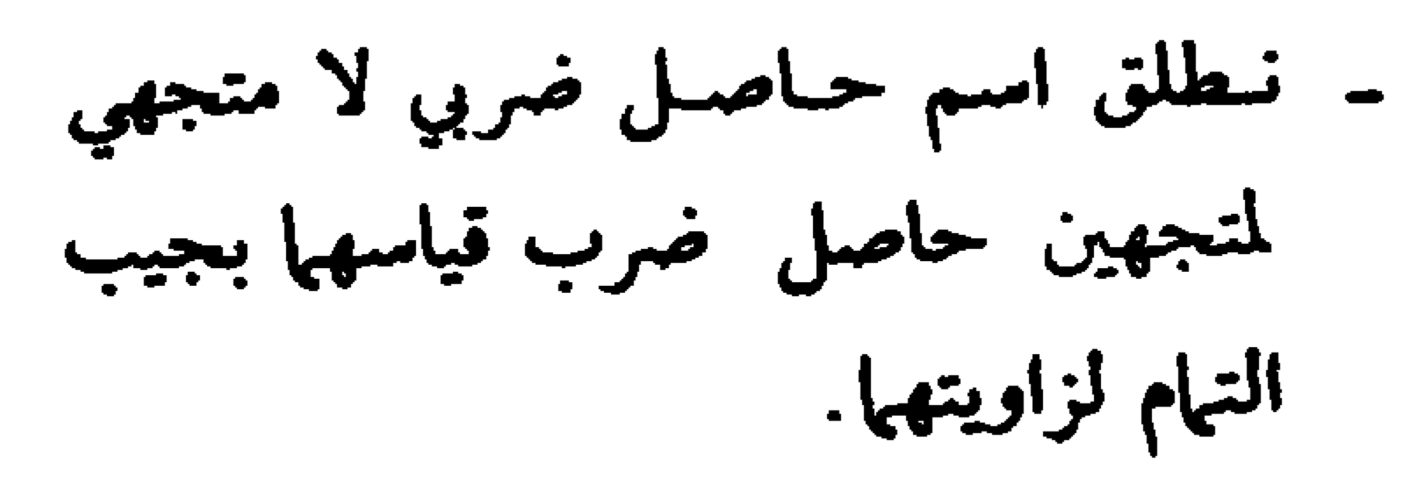
متفرقات هندسية



- خط سمسون Simson:

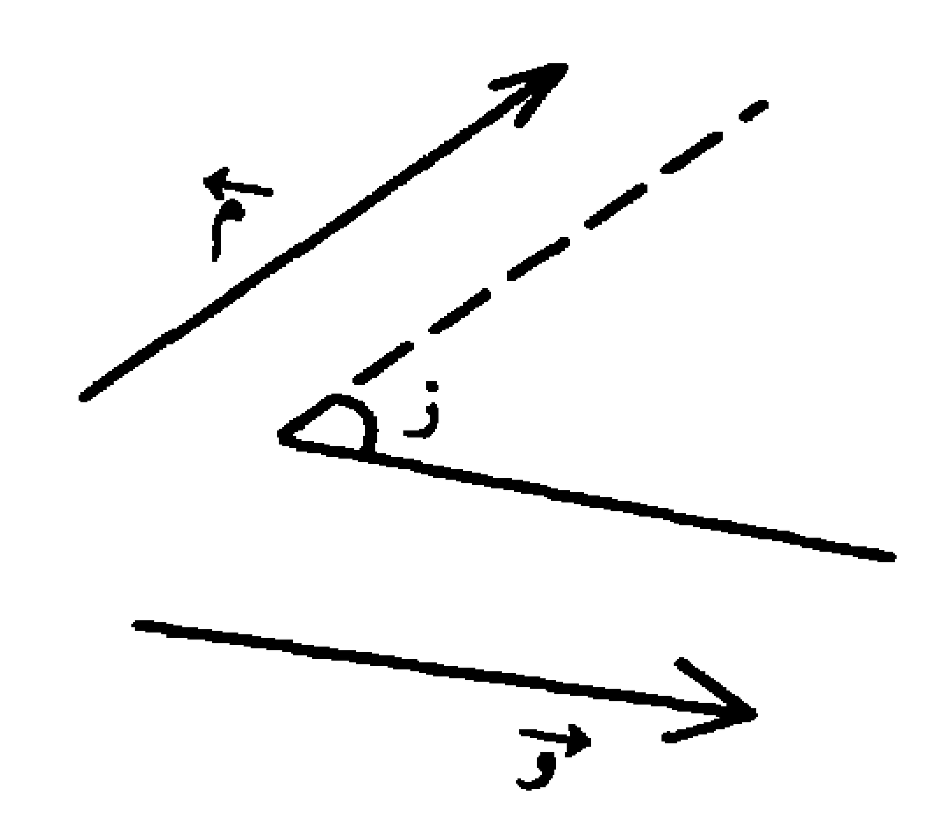
إن المكـان الهندسي للنقـاط التي تشكل مساقطها على جهات مثلث أ ب ج خطاً مستقيماً هو الدائرة المحاوطة للمثلث.





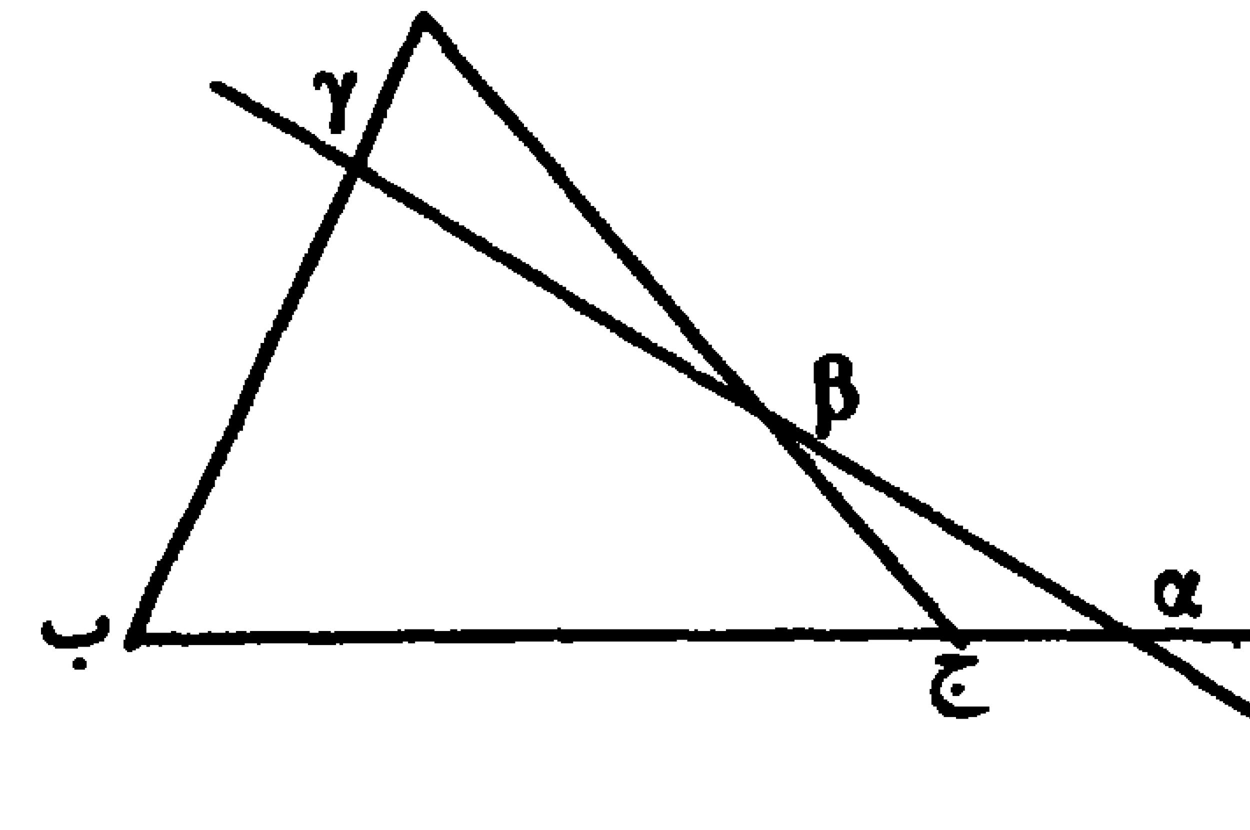
- نـطلق اسم حـاصـل ضربي لا متجهي لمتجهين حاصل ضرب قياسهما بجيب التمام لزاويتهما.

$$\vec{\text{م}} \times \vec{\text{و}} = |\text{م}| \times |\text{و}| \times \text{تمام ز}$$



- نظرية مينالوس Ménélaüs:

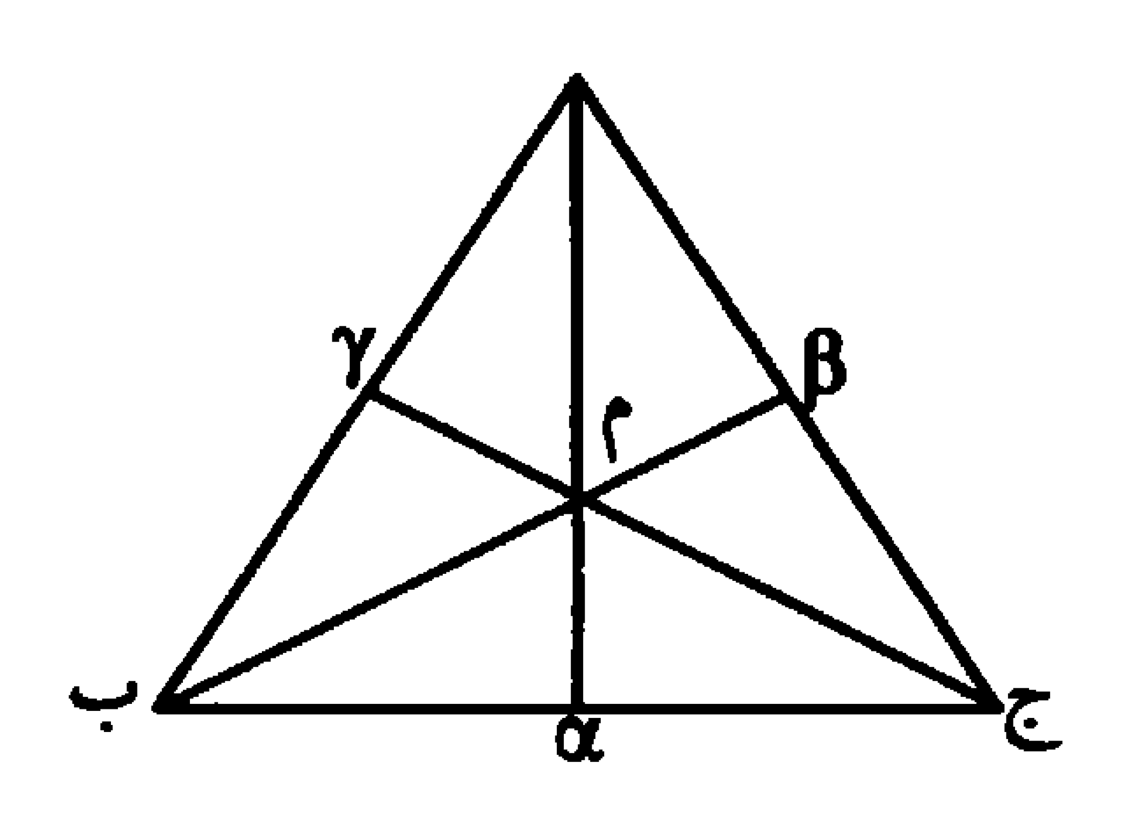
كي تكون النقاط α، β، γ المتخذة على جهات مثلث أ ب، ب ج، أ ج، على خط مستقيم يجب ويـكفـي أن يكــون معنا:



$$\frac{\text{ب}\alpha}{\text{ج}\alpha} \cdot \frac{\text{ج}\beta}{\text{أ}\beta} \cdot \frac{\text{أ}\gamma}{\text{ب}\gamma} = ١$$

- نظرية سيفا Ceva:

كي تلتقي المستقيمات الثلاثة المنطلقة من الرؤوس الثلاثة لمثلث ﺃ ب ج، يجب ويكفي أن تكون نقاط تقاطعها α، β، γ مع الجهات المقابلة محققة العلاقة التالية:



$$\frac{\text{ب}\,\alpha}{\text{ج}\,\alpha} \cdot \frac{\text{ج}\,\beta}{\text{ﺃ}\,\beta} \cdot \frac{\text{ﺃ}\,\gamma}{\text{ب}\,\gamma} = -1$$

- القسمة التناغمية

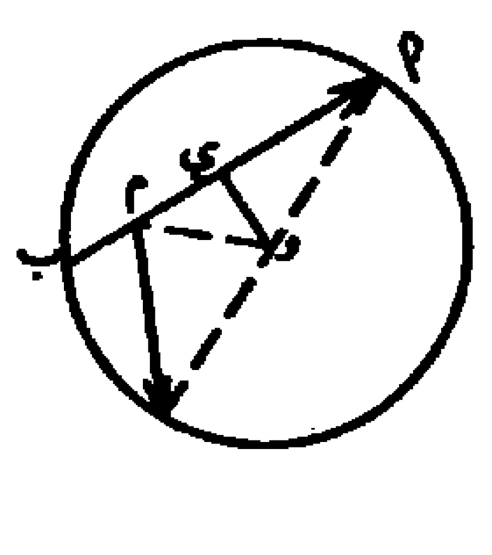
يقال عن النقطتين C و D إنهما مترافقين تناغمياً بالنسبة للنقطتين A و B إذا قسّمنا المتجه $\overrightarrow{AB}$ وفقاً للنسبة الحسابية نفسها.

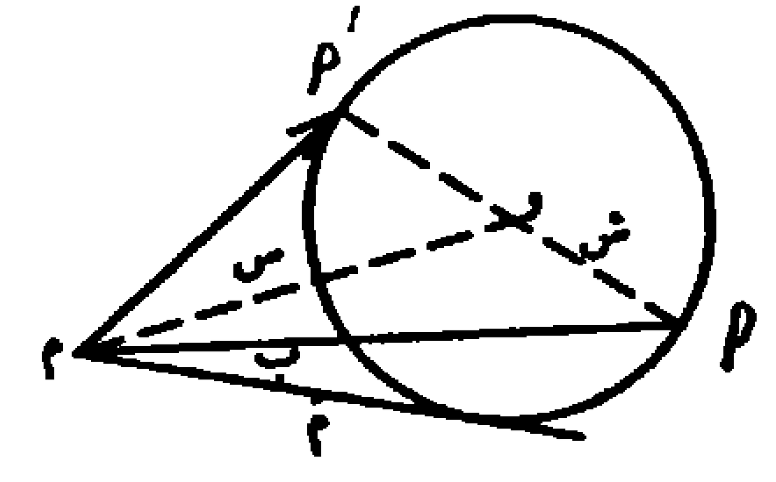
$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{-\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} \quad ؛ \quad \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = -1$$

	A		C	B			
O		I			J	D	

أو $(A, B, C, D) = -1$

- القدرة بالنسبة لدائرة: عندما يقطع خطاً منطلقاً من نقطة ثابتة م دائرة معينة في ﺃ وَ ب؛ فإن حاصل ضرب م ﺃ × م ب عدد ثابت يدعى قدرة النقطة م بالنسبة إلى الدائرة.

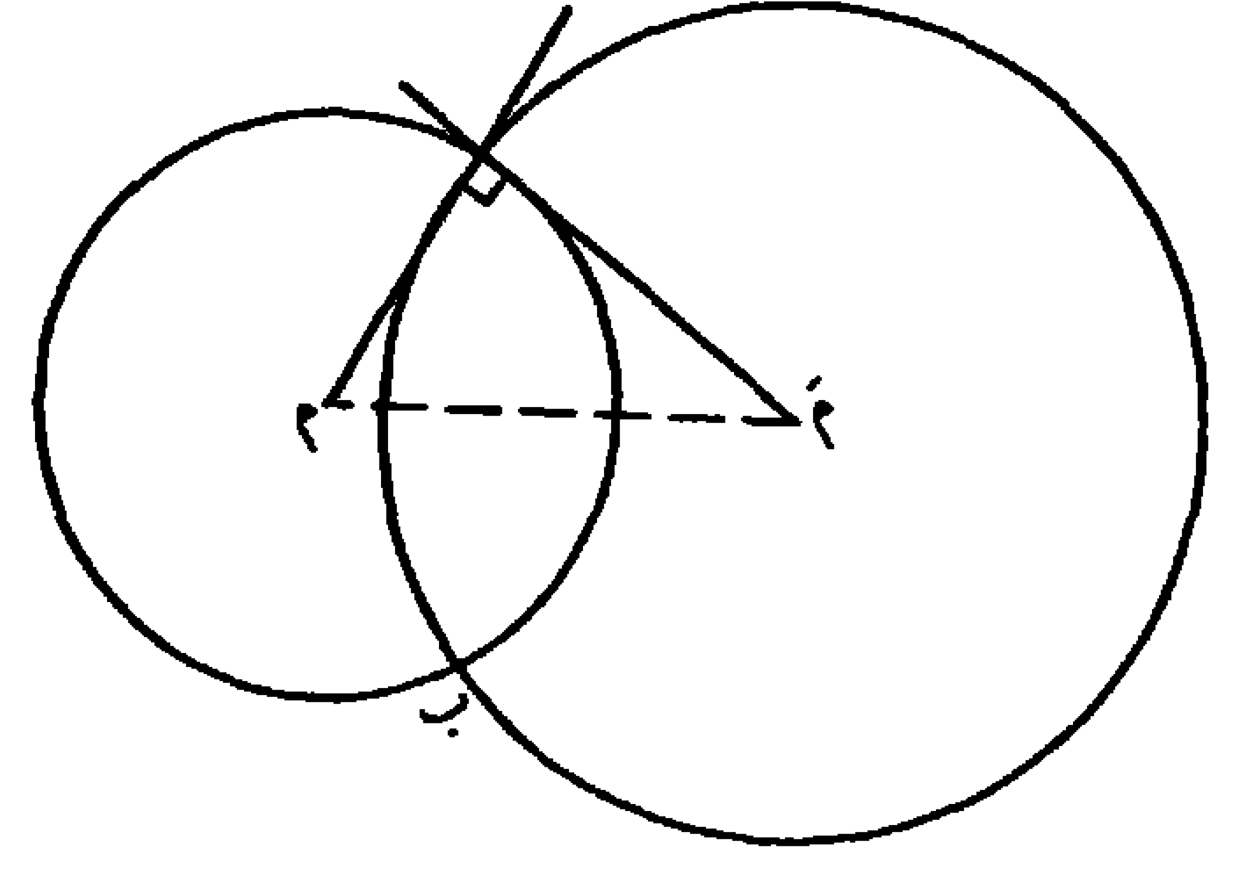




ق (م) = سه^{٢} - ش^{٢}

ق (م) = م أ × م ب

إذاً م أ × م ب = سه^{٢} - ش^{٢}

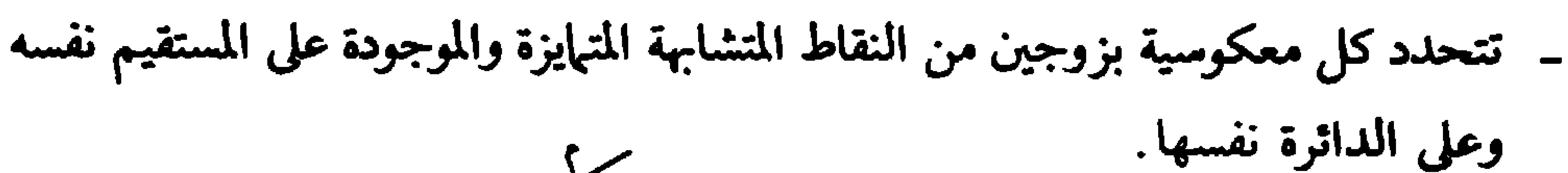


- الـدوائر المتعـامدة: يقـال عن دائرتـين متقـاطعيتن إنهما متعامـدتين في مسـطح واحد عندما تكون المماسات المنطلقة من نقطة تقاطع متعامدة.

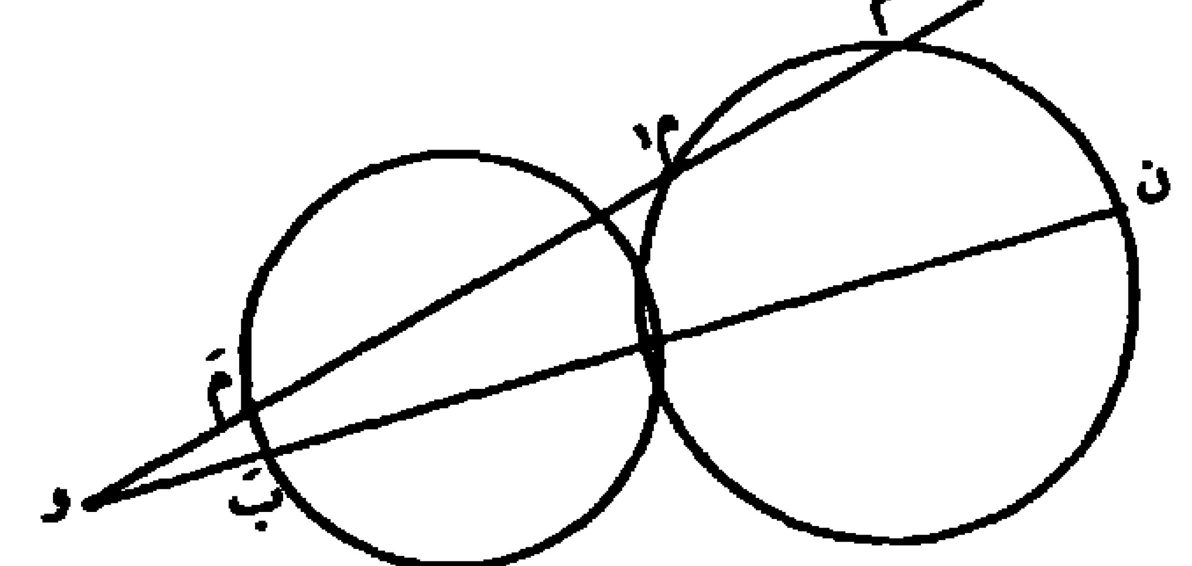
- المعكوسية Inversion :

إذا كان معنا نقطة ثابتة و وعدد جبري غير الصفر ع. نطلق اسم معكوسية على التحول النقطي الذي يقابل كل نقطة م من المسـطح أو الفـراغ النقـطة م′ من المستقيم و م بحيث يكون:

و م × و م′ = ع.



- تتحدد كل معكوسية بزوجين من النقاط المتشابهة المتمايزة والموجودة على المستقيم نفسه وعلى الدائرة نفسها.

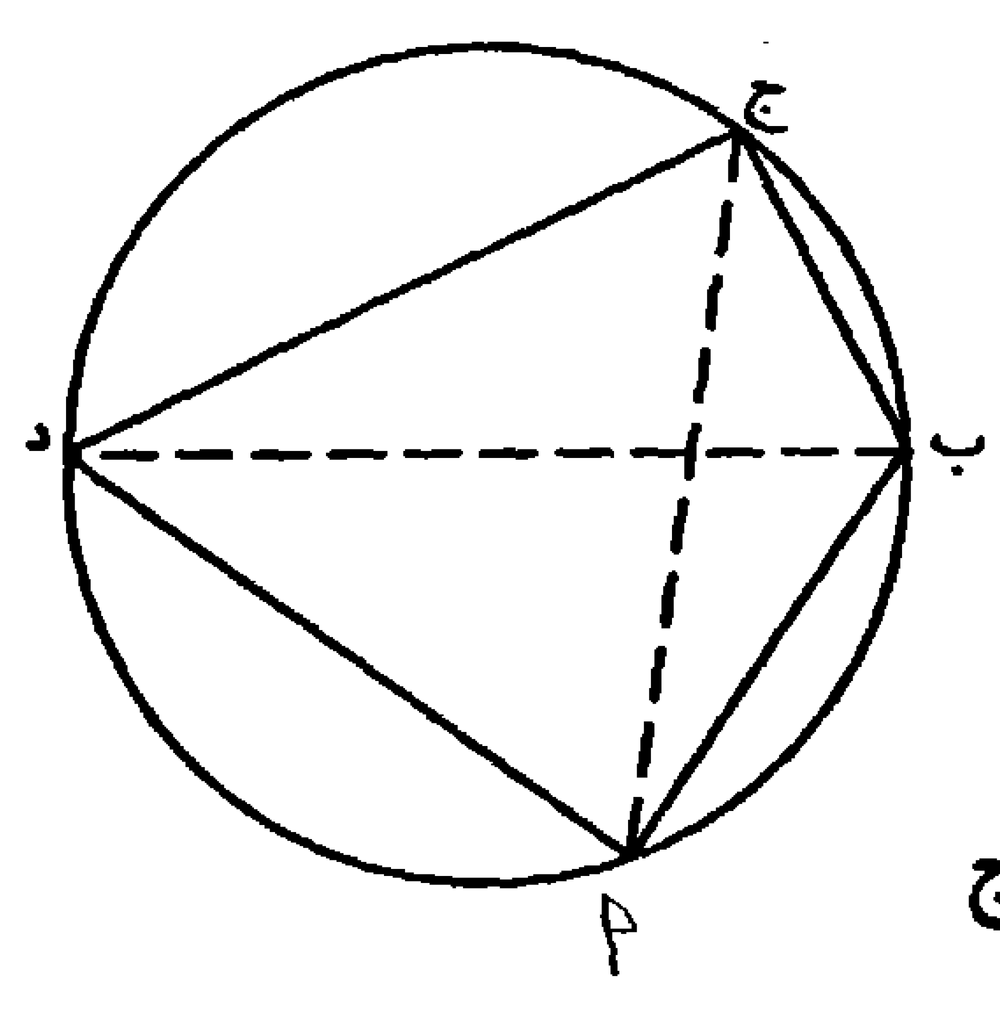


- إن معكوس مستقيم لا يمر بمركز التقاطع هو دائرة تمر بهذا المركـز.

- إن معكوس دائرة تمر في مركز التقاطع هو مستقيم عمودي على القطر المنطلق من هذا المركـز.

- إن معكوس دائرة لا تمر في مركز المعكوسية هي دائرة مشابهة. ويكون مركز المعكوسية مركز تماثل الوضع Homothétie للدائرتين.

- نظرية بطليموس: كي يكون رباعي محاطاً بدائرة تمر برؤوسه الأربعة يجب ويكفي أن يكون حاصل ضرب القطرين مساوياً لمجموع حاصل ضرب الجهات المتقابلة:

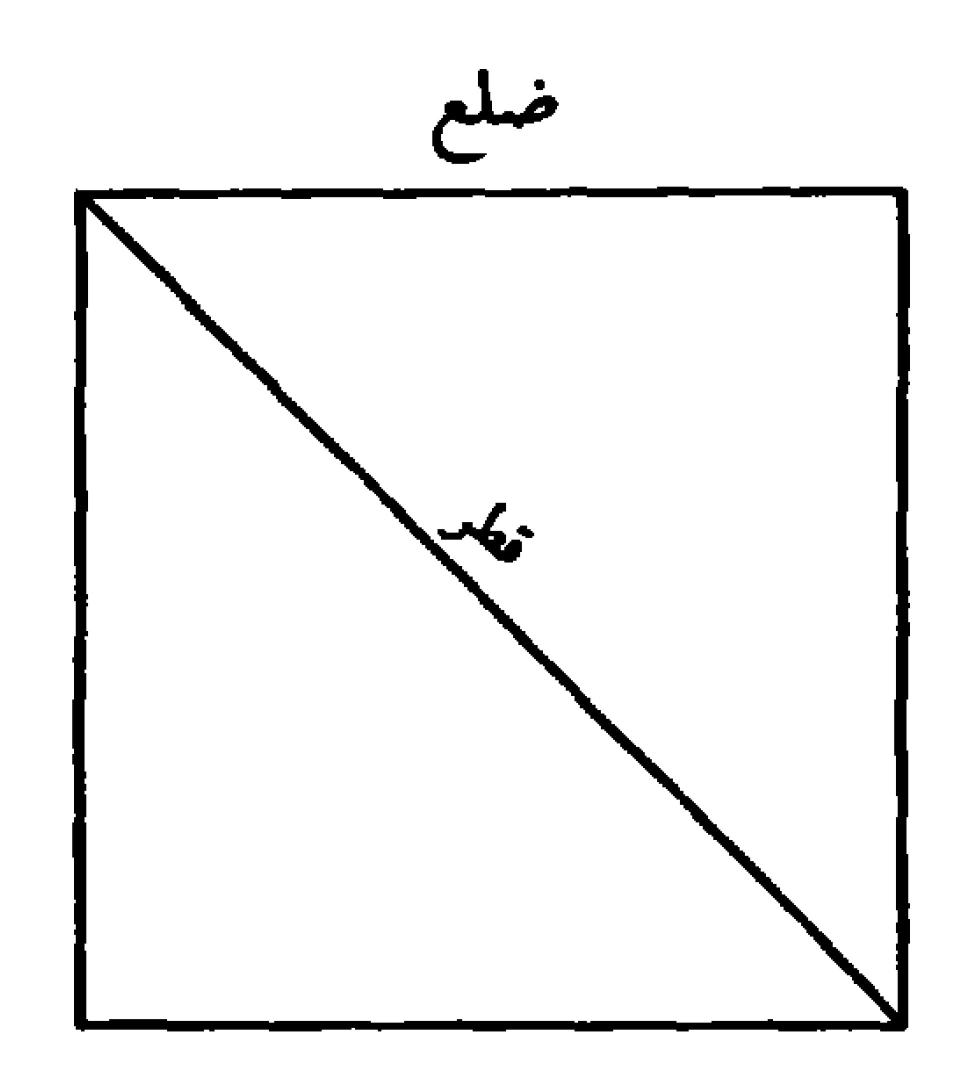


ب د × أ ج = أ ب × ج د + أ د × ب ج

الفصل السابع عشر

مساحات الأشكال الهندسيّة وأحجامها

١ ـ المربَّع :



محيط المربَّع = ضلع × ٤ .

ضلع المربَّع = محيطه ÷ ٤ .

مساحة المربَّع = ضلع × ضلع .

ضلع المربَّع = $\sqrt{\text{مساحة المربع}}$.

٢ ـ المستطيل:



محيط المستطيل: (طول + عرض) × ٢ .

طول المستطيل = $\frac{\text{محيطه}}{٢}$ − عرضه .

عرض المستطيل = $\frac{\text{محيطه}}{٢}$ − طوله .



مساحة المستطيل = طول × عرض .

الطول = المساحة ÷ العرض.

العرض = المساحة ÷ الطول.

القطر = $\sqrt{(\text{العرض})^{٢} + (\text{الطول})^{٢}}$.



٣ - متوازي الأضلاع:

المحيط = (الضلع الكبير + الضلع الصغير) × ٢ .

الضلع الكبير = $\frac{\text{المحيط}}{\text{٢}}$ − الضلع الصغير.

الضلع الصغير = $\frac{\text{المحيط}}{\text{٢}}$ − الضلع الكبير.

الضلع الكبير

الارتفاع

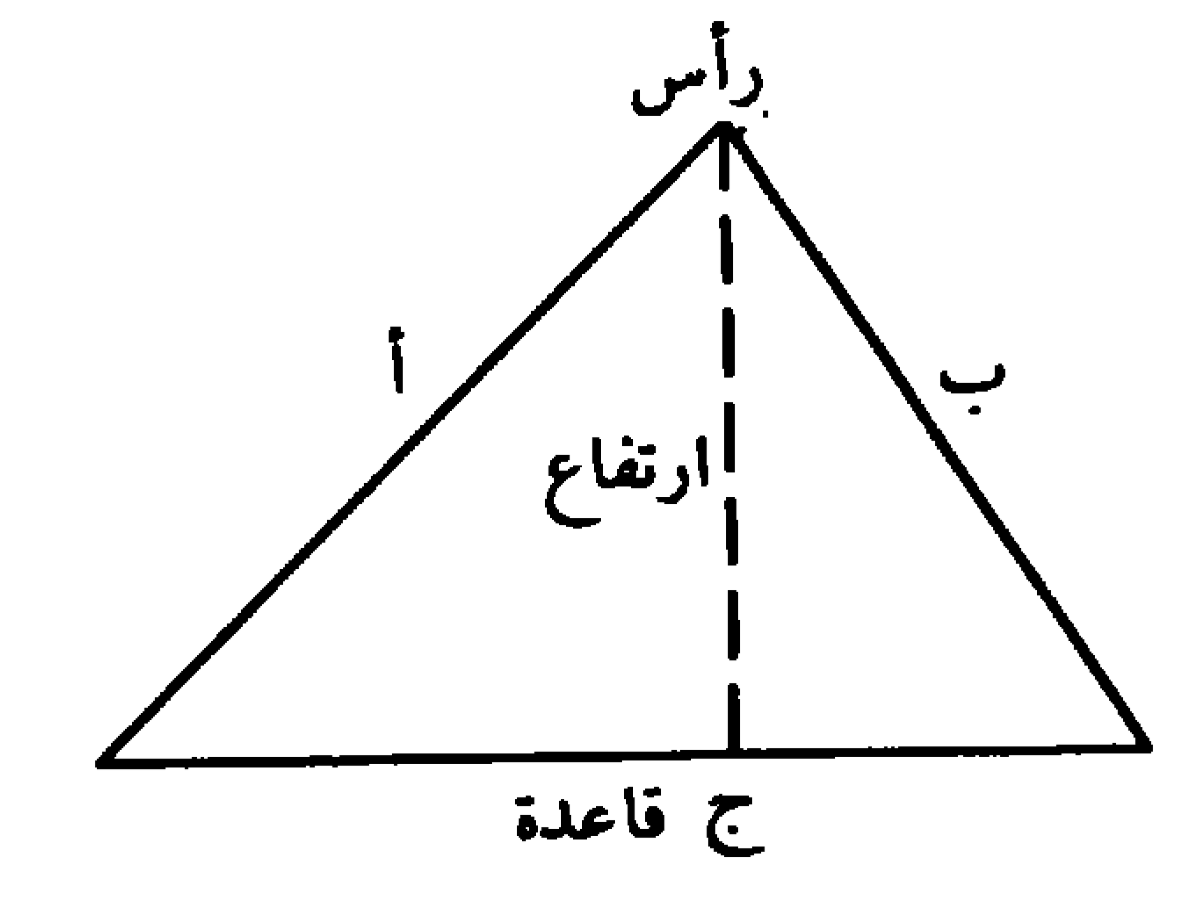
الضلع الصغير

مساحة متوازي الأضلاع = قاعدة × ارتفاع .

القاعدة = المساحة ÷ الارتفاع.

الارتفاع = المساحة ÷ القاعدة.

٤ - المثلّث:



محيط المثلّث = مجموع أضلاعه الثلاثة .

مساحة المثلث = $\frac{\text{قاعدة × ارتفاع}}{\text{٢}}$.

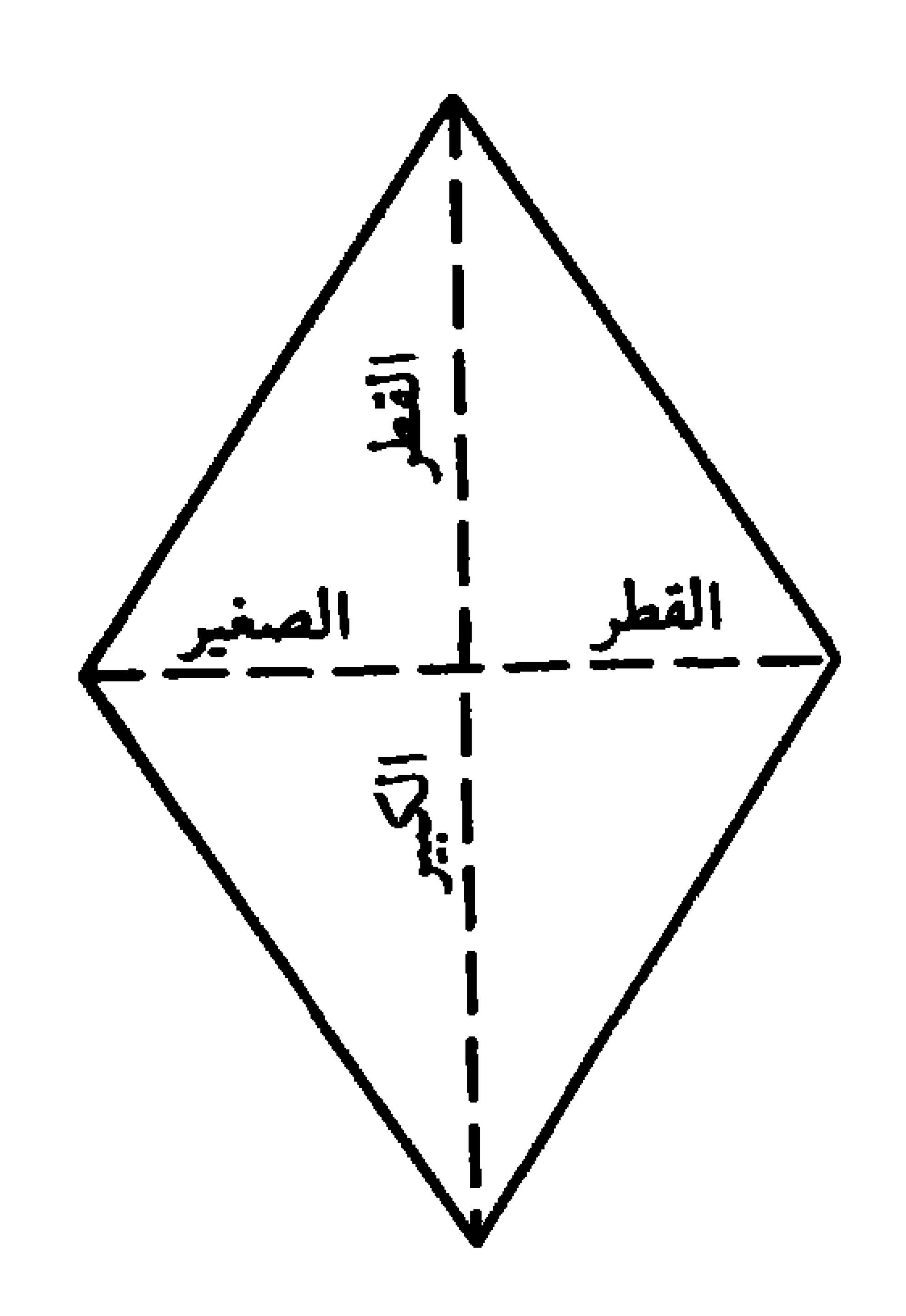
قاعدة المثلث = $\frac{\text{مساحة × ٢}}{\text{ارتفاع}}$.

الارتفاع = $\frac{\text{مساحة × ٢}}{\text{قاعدة}}$.

إذا كان سہ = $\frac{\text{أ + ب + ج}}{\text{٢}}$.

تكون المساحة = $\sqrt{\text{س (س − أ) (س − ب) (س − ج)}}$.

٥ ـ المعيّن:



محيط المعيّن = ضلع × ٤.

ضلع = محيط ÷ ٤.

$$\text{المساحة} = \frac{\text{القطر الكبير} \times \text{القطر الصغير}}{٢}.$$

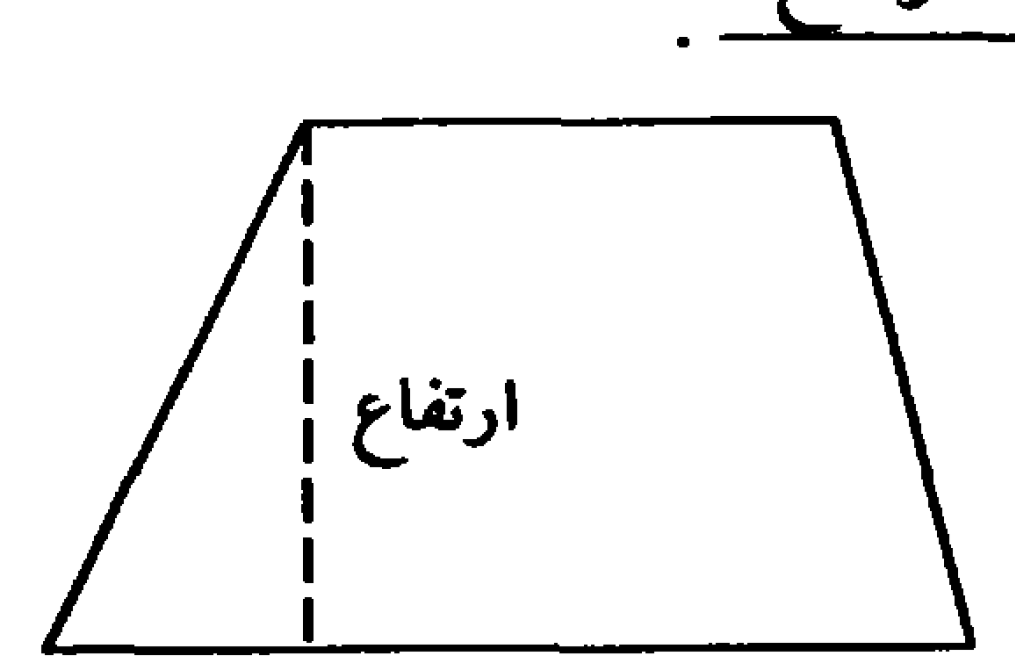
$$\text{القطر الكبير} = \frac{\text{المساحة} \times ٢}{\text{القطر الصغير}}.$$

$$\text{القطر الصغير} = \frac{\text{المساحة} \times ٢}{\text{القطر الكبير}}.$$

٦ ـ شبه المنحرف:

محيط شبه المنحرف = مجموع أضلاعه الأربعة

$$\text{المساحة} = \frac{(\text{قاعدة كبرى} + \text{قاعدة صغرى}) \times \text{ارتفاع}}{٢}.$$



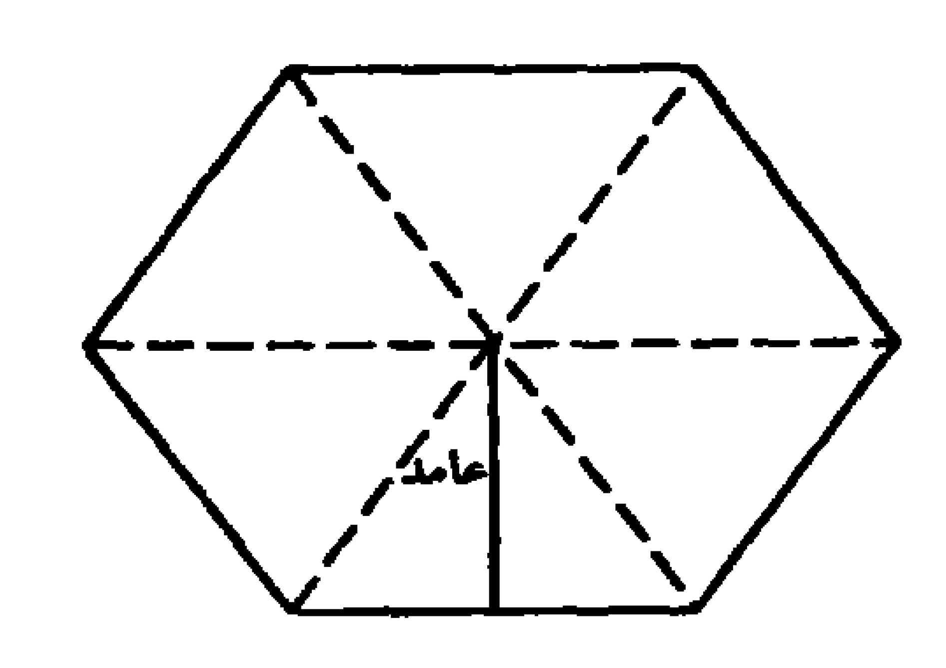
$$\text{الارتفاع} = \frac{\text{المساحة} \times ٢}{(\text{قاعدة كبرى} + \text{قاعدة صغرى})}.$$

$$\text{القاعدة الكبرى} = \frac{\text{المساحة} \times ٢}{\text{الارتفاع}} - \text{القاعدة الصغرى}.$$

$$\text{القاعدة الصغرى} = \frac{\text{المساحة} \times ٢}{\text{الارتفاع}} - \text{القاعدة الكبرى}.$$

$$\text{القاعدة الوسطى} = \frac{\text{القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى}}{٢}.$$

٧ ـ السداسي المنتظم:



المحيط = ضلع × ٦.

الضلع = المحيط ÷ ٦.

$$\text{المساحة} = \frac{\text{المحيط} \times \text{العامد}}{٢}.$$

٨ ـ المضلّع المنتظم:

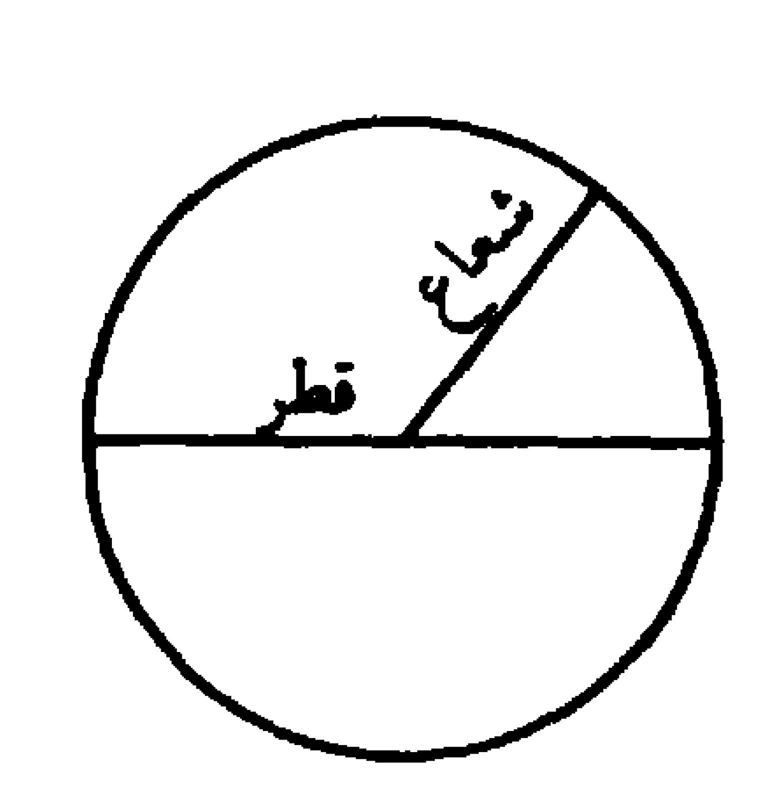
المحيط = ضلع × عدد الأضلاع.

ضلع المضلّع المنتظم = المحيط ÷ عدد الأضلاع.

$$\text{مساحة المضلع المنتظم} = \frac{\text{المحيط} \times \text{العامد}}{٢}.$$

$$\text{الضلع} = \frac{\text{مساحة} \times ٢}{\text{عامد} \times \text{عدد الأضلاع}}.$$

٩ ـ الدائرة والقرص:



محيط الدائرة = قطر × π مع π = ٣,١٤١٦.

محيط الدائرة = شعاع × ٢ × π .

القطر = ٢ شعاع.

القطر = المحيط ÷ π .

الشعاع = المحيط ÷ ٢π .

مساحة القرص: شعاع × شعاع × π .

$$\text{شعاع الدائرة} = \sqrt{\frac{\text{مساحة القرص}}{\pi}}.$$

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{محيط الدائرة} \times \text{عدد درجات القوس}}{٣٦٠^\circ}.$$

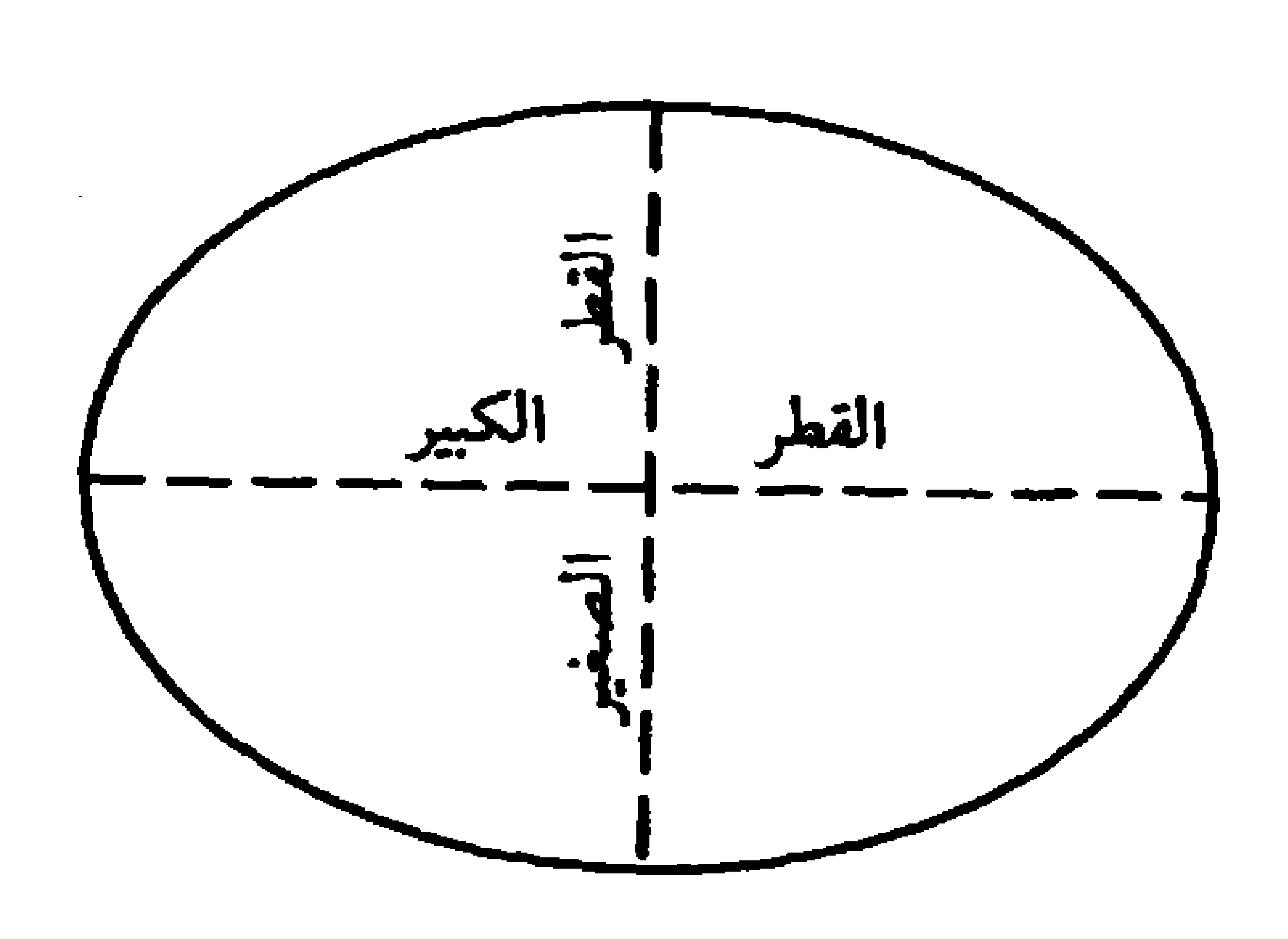
$$\text{مساحة القطاع} = \frac{\text{مساحة القرص} \times \text{عدد درجات القوس}}{\text{٣٦٠°}} .$$

مساحة الإكليل = مساحة القرص الكبير - مساحة القرص الصغير.

١٠ ـ الإهليلج أو القطع الناقص:

$$\text{المحيط} = \frac{\text{القطر الكبير} + \text{القطر الصغير}}{\text{٢}} \times \pi .$$

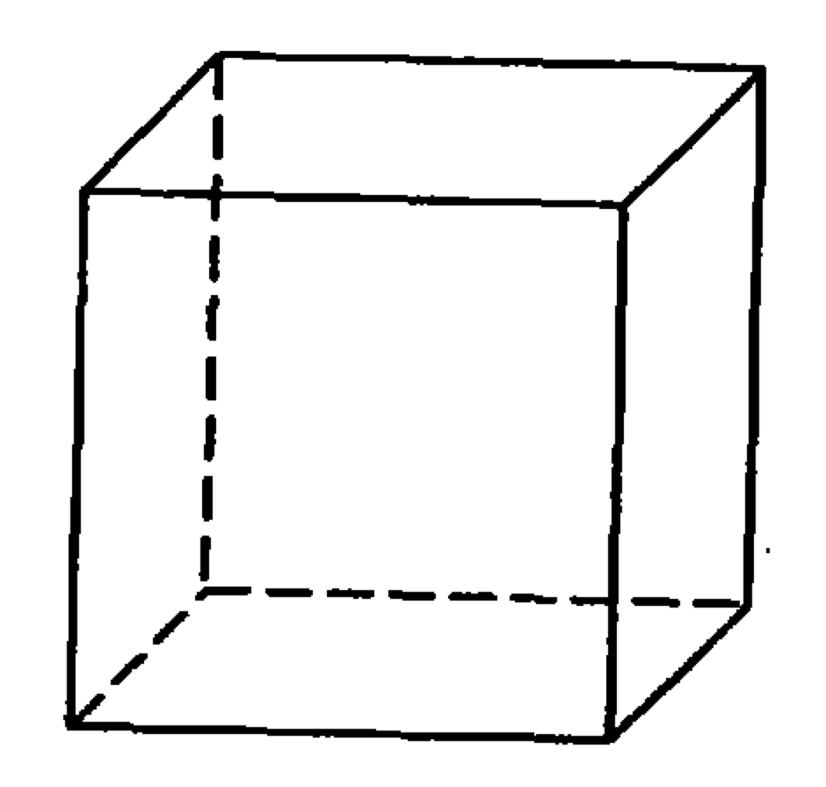
$$\text{المساحة} = \frac{\text{القطر الكبير} \times \text{القطر الصغير} \times \pi}{\text{٤}} .$$



الفصل الثامن عشر

الأحجام

١ ـ المكعَّب:



المساحة الجانبية = ضلع × ضلع × ٤ .

الضلع = $\sqrt{\frac{\text{المساحة الجانبية}}{٤}}$

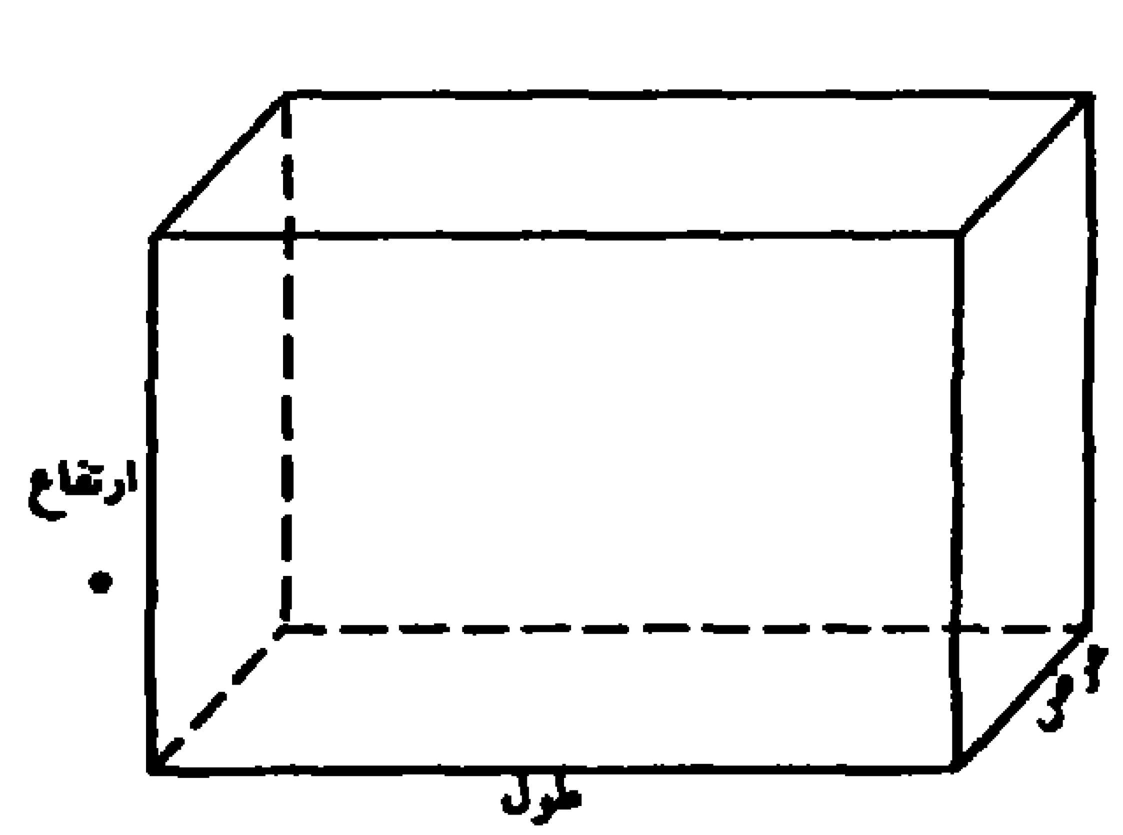
المساحة الكلية = ضلع × ضلع ×٦ .

الضلع = $\sqrt{\frac{\text{المساحة الكلية}}{٦}}$.

حجم المكعب = ضلع × ضلع × ضلع .

الضلع = $\sqrt[3]{\text{الحجم}}$.

٢ ـ متوازي المستطيلات:



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × ارتفاعه

محيط القاعدة = $\frac{\text{المساحة الجانبية}}{\text{الارتفاع}}$.

الارتفاع = $\frac{\text{المساحة الجانبية}}{\text{محيط القاعدة}}$.

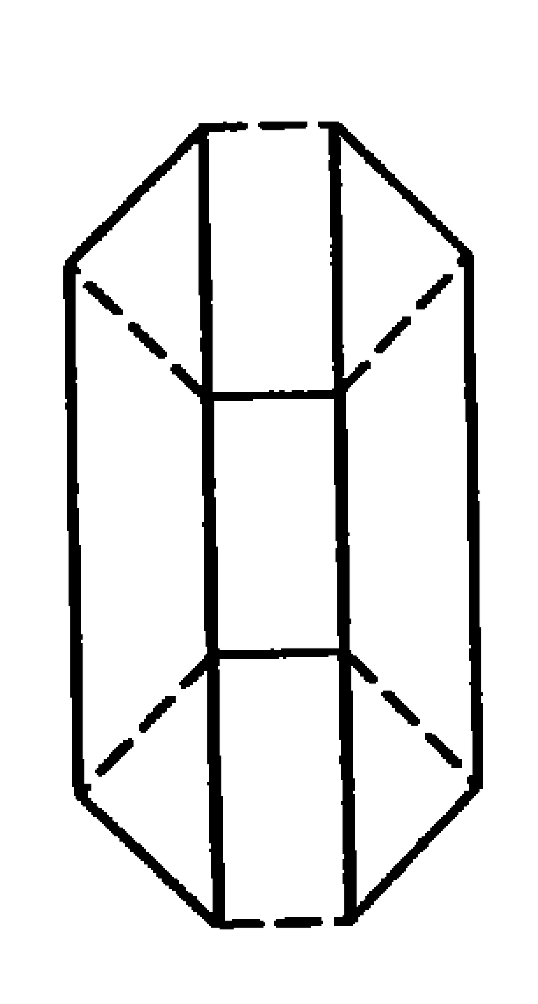
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين.

حجم متوازي المستطيلات = طوله × عرضع × ارتفاعه.

$$\text{الارتفاع} = \frac{\text{حجم}}{\text{طول × عرض}}\text{؛ الطول} = \frac{\text{حجم}}{\text{عرض × ارتفاع}}\text{؛}$$

$$\text{العرض} = \frac{\text{حجم}}{\text{طول × ارتفاع}}.$$

٣ - المنشور القائم:



المساحة الجانبيّة = محيط × ارتفاعه.

محيط القاعدة = المساحة الجانبية ÷ الارتفاع.

ضلع القاعدة = المساحة الجانبية ÷ (ارتفاع × عدد أضلاعه).

الارتفاع = المساحة الجانبية ÷ محيط القاعدة.

مساحته الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين.

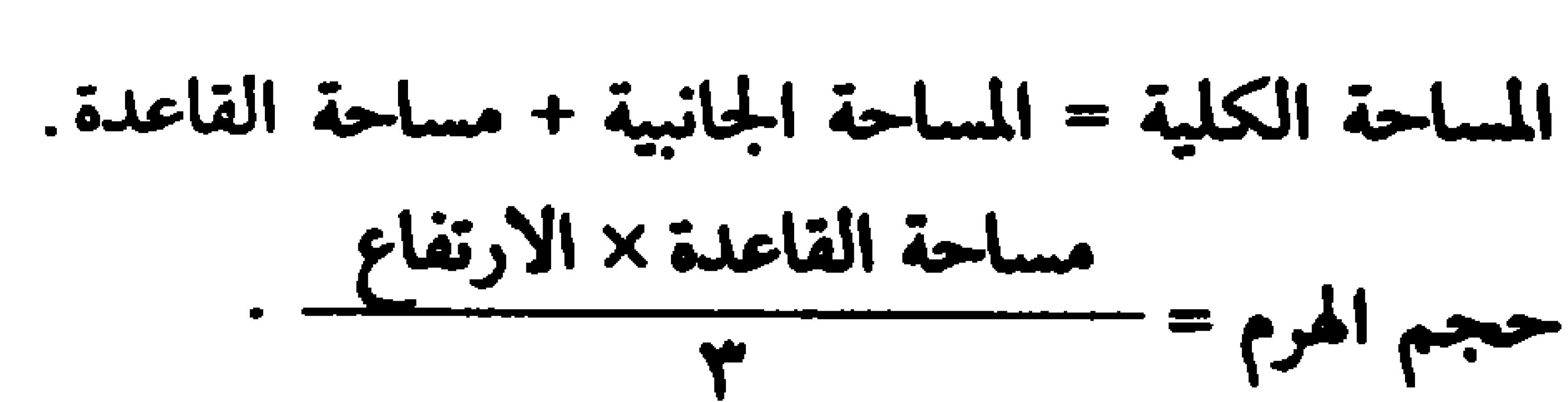
حجمالمنشور القائم = مساحة قاعدته × ارتفاعه.

٤ - الهرم:

$$\text{المساحة الجانبية} = \frac{\text{محيط القاعدة × العامد}}{٢}.$$

$$\text{محيط القاعدة} = \frac{\text{المساحة الجانبيّة × ٢}}{\text{العامد}}.$$

$$\text{عامد الهرم} = \frac{\text{المساحة الجانبيّة × ٢}}{\text{محيط القاعدة}}.$$



المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.

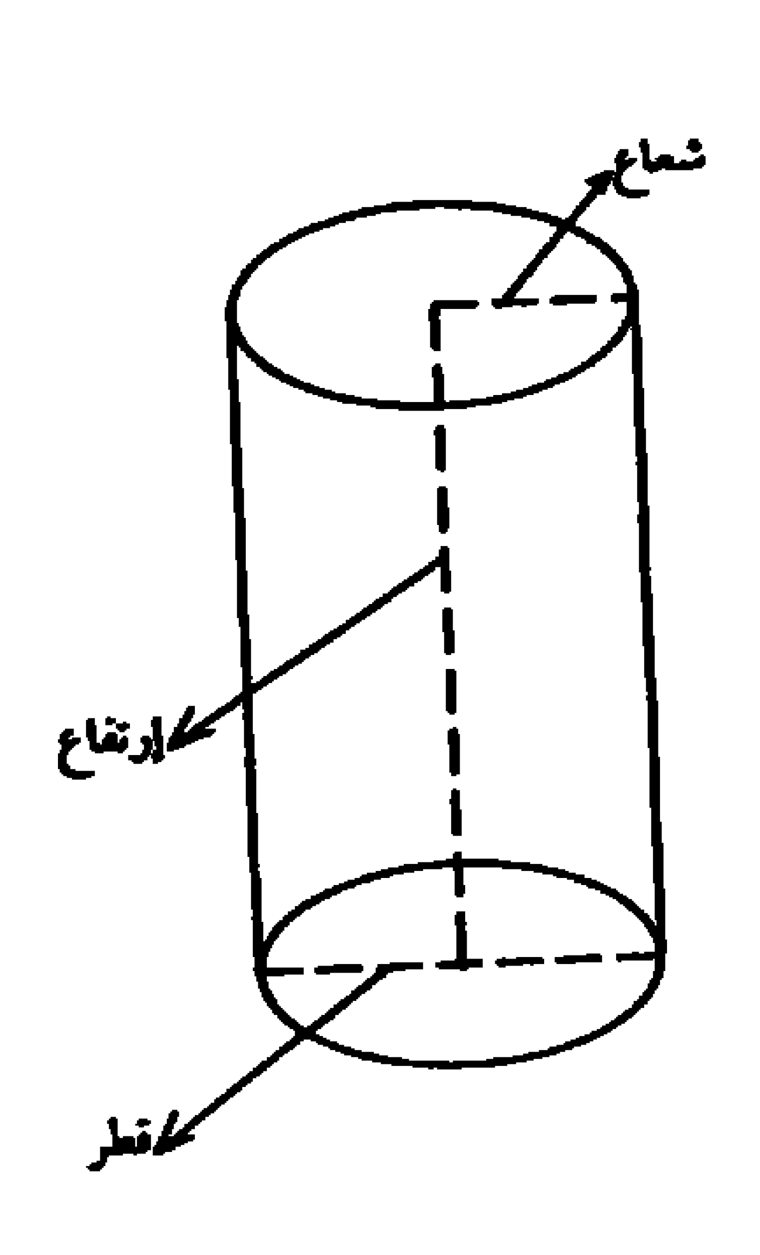


$$\text{حجم الهرم} = \frac{\text{مساحة القاعدة × الارتفاع}}{٣}.$$

مساحة القاعدة = (الحجم × ٣) ÷ الارتفاع.

الارتفاع = (الحجم × ٣) ÷ مساحة القاعدة.

٥ ـ الإسطوانة:



المساحة الجانبيّة = محيط القاعدة × الارتفاع

محيط القاعدة = المساحة الجانبيّة ÷ الارتفاع

الارتفاع = المساحة الجانبيّة ÷ محيط القاعدة

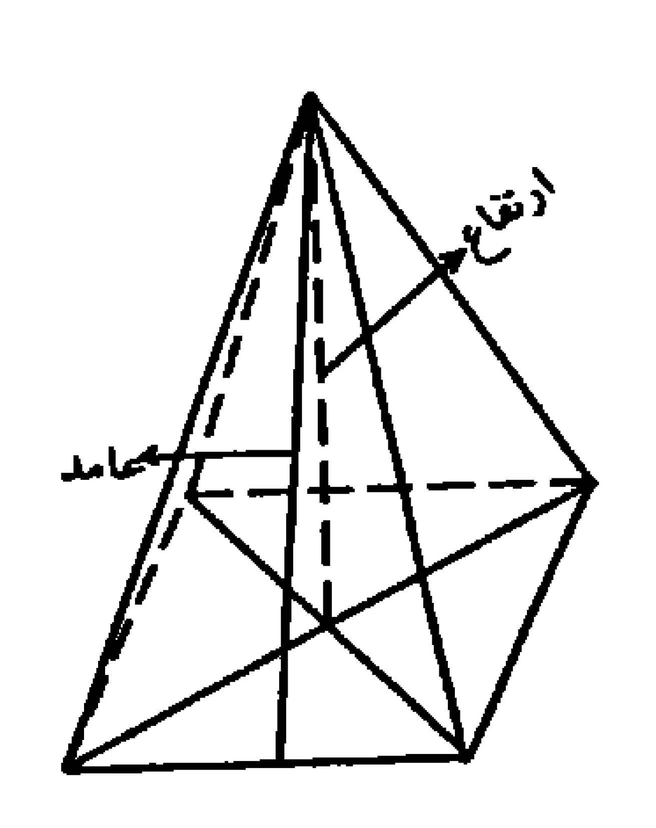
المساحة الكلية = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدتين

حجم الإسطوانة = مساحة القاعدة × الإرتفاع

مساحة القاعدة = الحجم ÷ الارتفاع

الإرتفاع = الحجم ÷ مساحة القاعدة

٦ ـ المخروط:



المساحة الجانبيّة = $\frac{\text{محيط القاعدة × العامد}}{٢}$.

محيط القاعدة = (المساحة الجانبيّة × ٢) ÷ العامد.

العامد = (المساحة الجانبية × ٢) ÷ محيط القاعدة.

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.

الحجم = (مساحة القاعدة × الارتفاع) ÷ ٣.

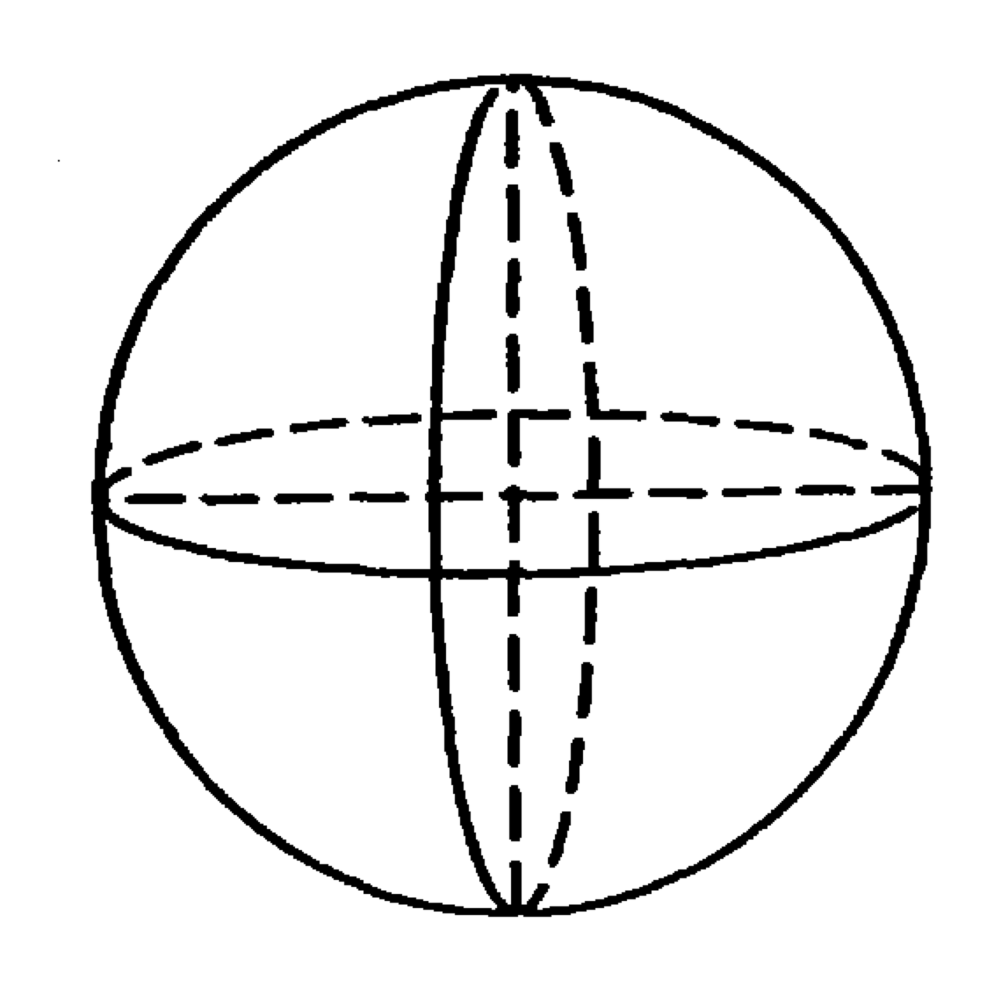
مساحة القاعدة = (الحجم × ٣) ÷ الارتفاع.

الارتفاع = (الحجم × ٣) ÷ مساحة القاعدة.

٧ ـ الكرة:

مساحة الكرة = (شعاع × شعاع × π) × ٤.

مساحة الكرة = مساحة الدائرة الكبرى × ٤.

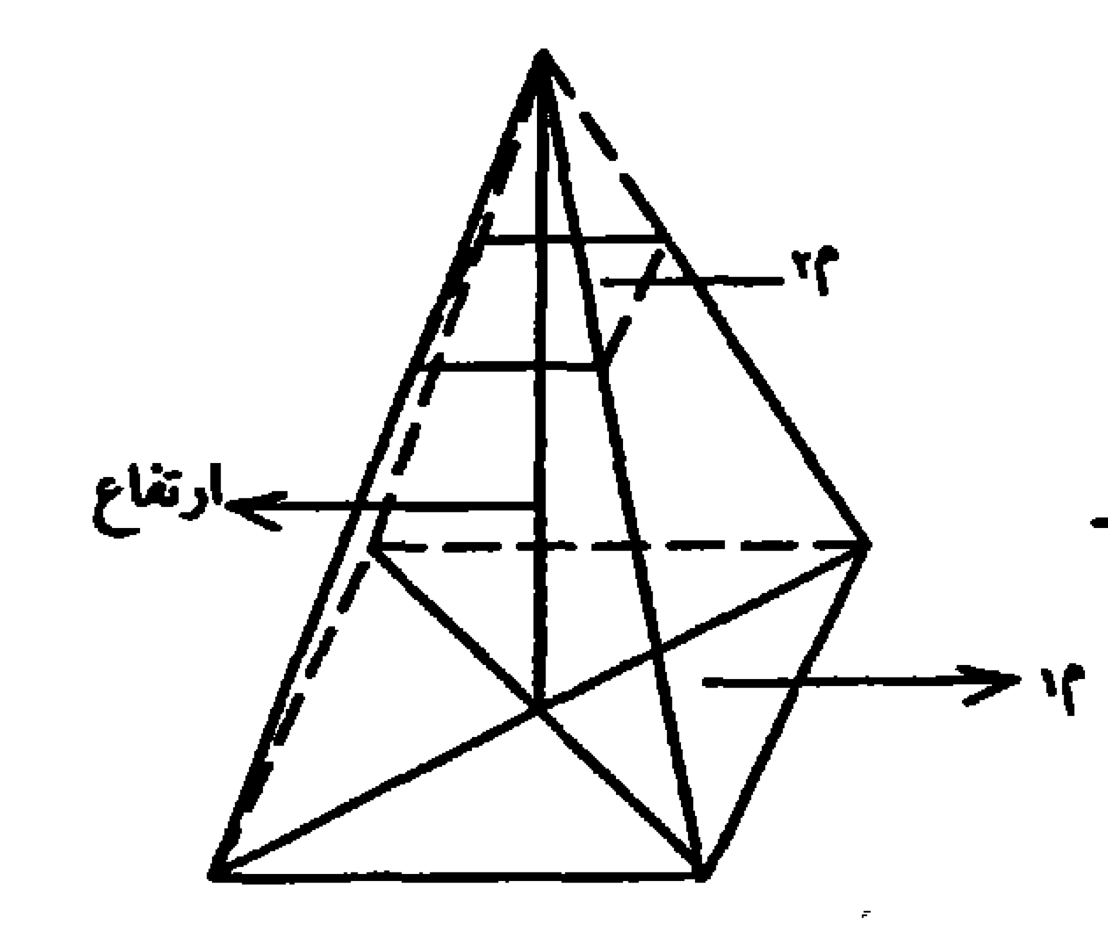


$$\text{الشعاع} = \sqrt{\frac{\text{المساحة}}{٤ \times \pi}}$$

$$\text{الحجم} = \frac{٤ \times \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \pi}{٣}.$$

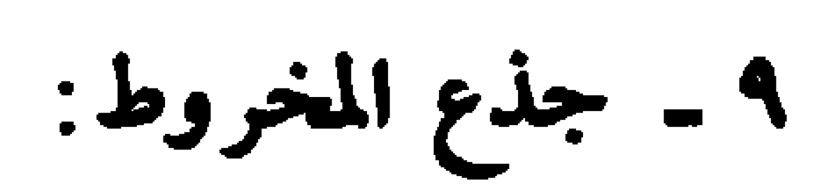
أو

$$\text{الحجم} = \frac{\text{مساحة الكرة} \times \text{الشعاع}}{٣}.$$

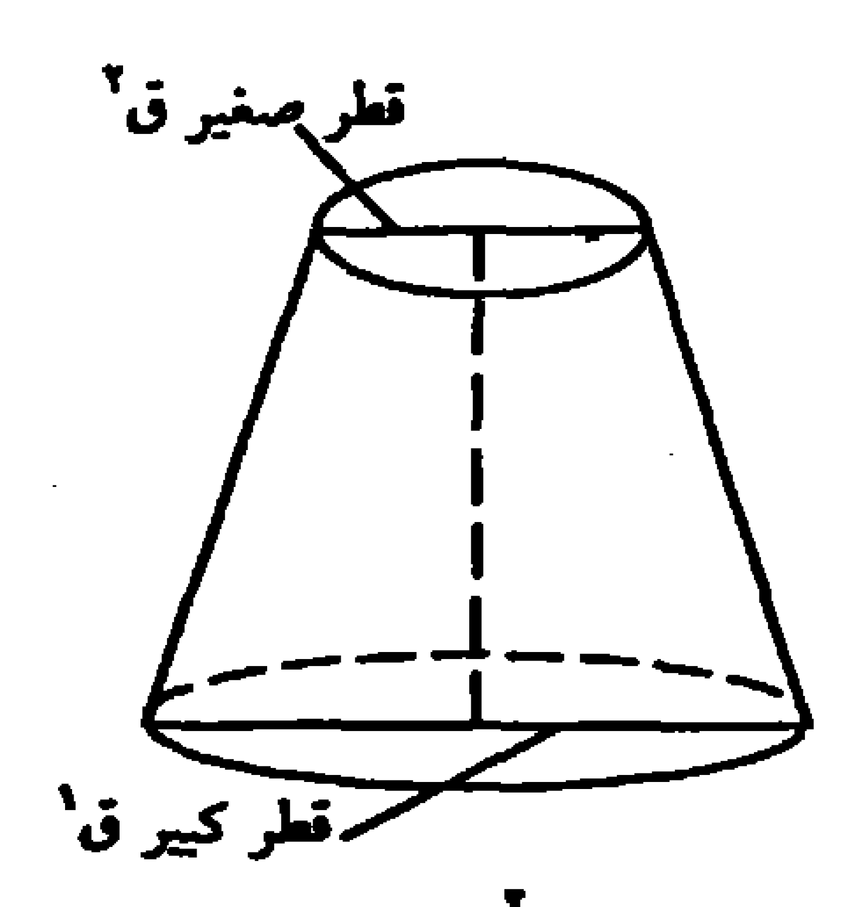


٨ ـ جذع الهرم:

$$\text{الحجم} = \frac{\text{ارتفاع}}{٣}\left(\text{م}_١ + \text{م}_٢ + \sqrt{\text{م}_١ \times \text{م}_٢}\right)$$

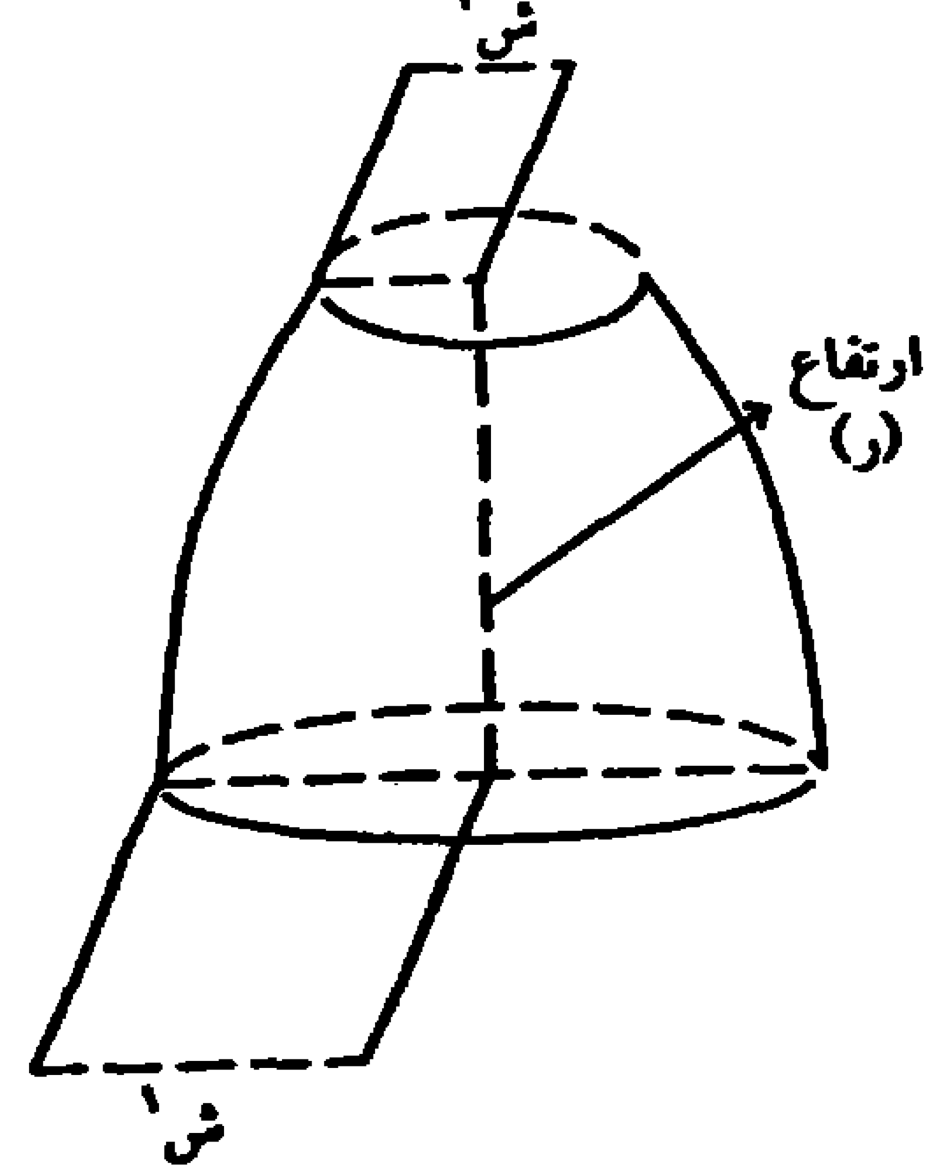


٩ ـ جذع المخروط:

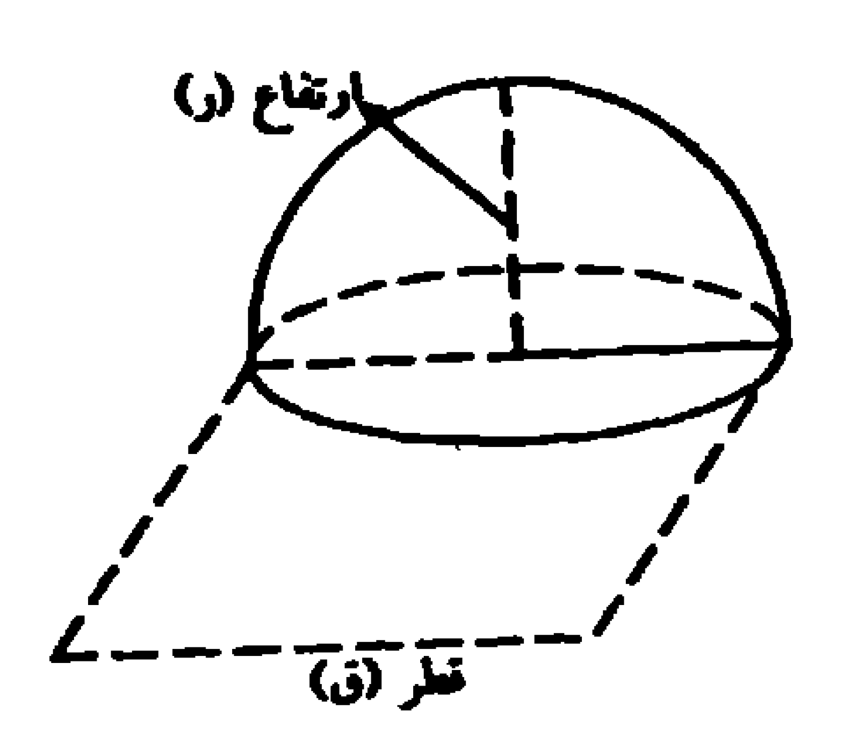


$$\text{الحجم} = \frac{\pi}{١٢}\left(\text{ق}_١^٢ + \text{ق}_١\text{ق}_٢ + \text{ق}_٢^٢\right).$$

١٠ ـ طوق كروي:

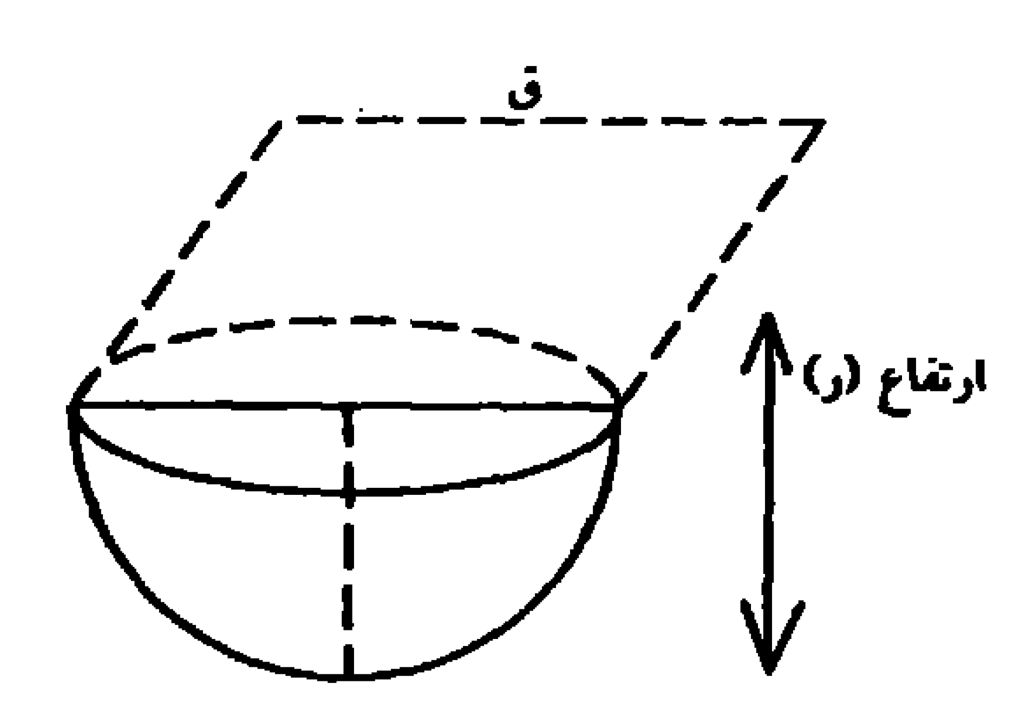


$$\text{الحجم} = \frac{\pi}{٦}\left(٣\,\text{ش}_٢^٢ + ٣\,\text{ش}_١^٢ + \text{ر}^٢\right).$$



١١ ـ قلنسوة كروية:

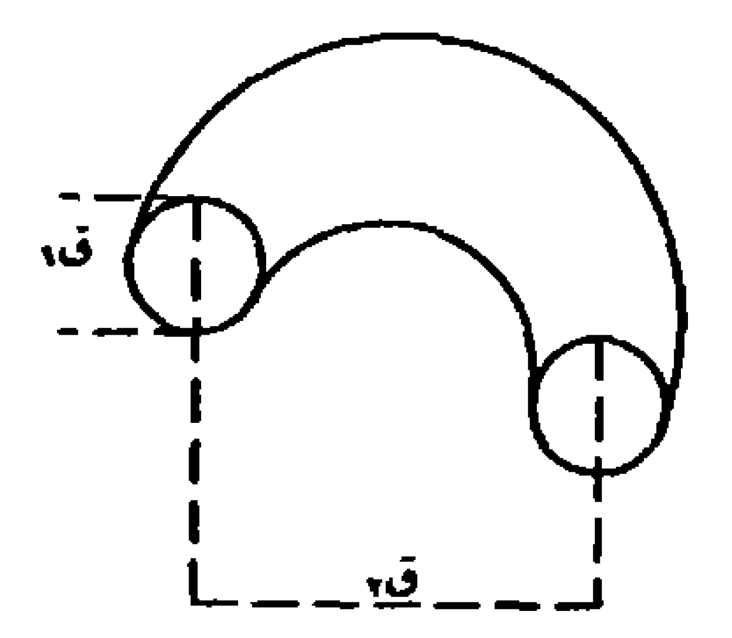
الحجم = $\frac{\pi \text{ ر}}{٦} \left(\frac{٣}{٤} \text{ ق}^{٢} + \text{ر}^{٢} \right)$.



١٢ ـ مقطع كروي:

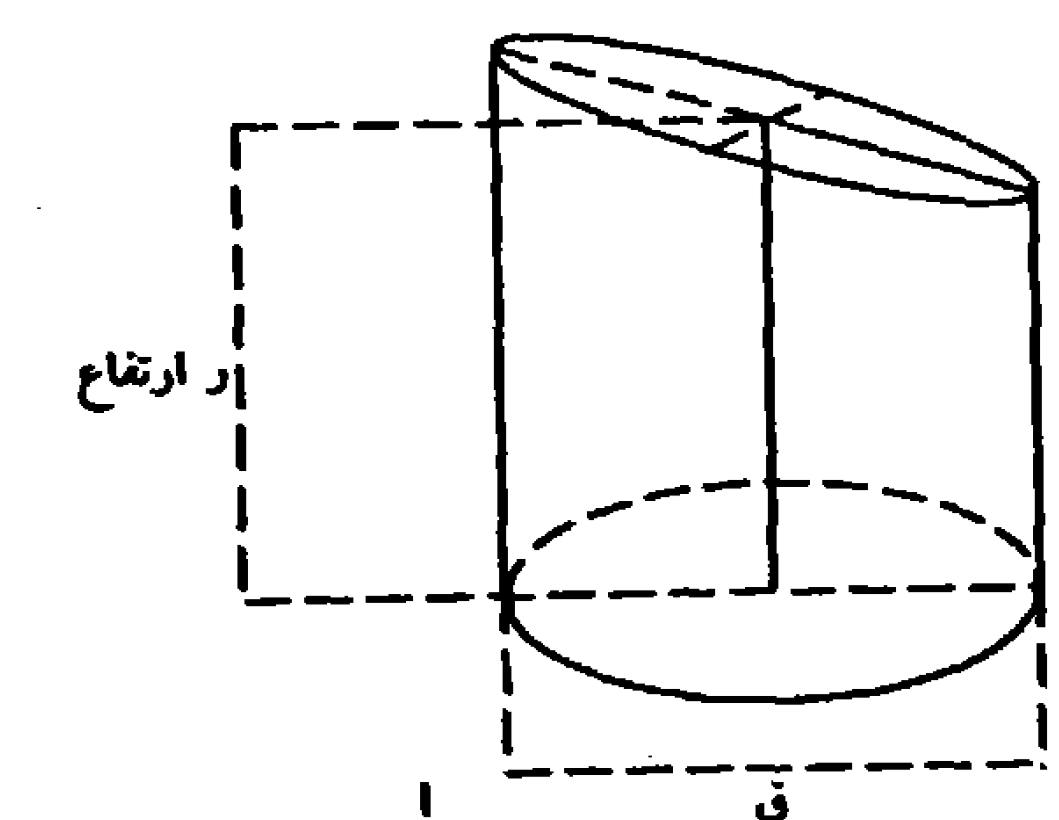
الحجم = $\frac{٢}{٣} \pi \text{ ش}^{٢} \times \text{ر}$.

ش = الشعاع الأصلي للكرة.



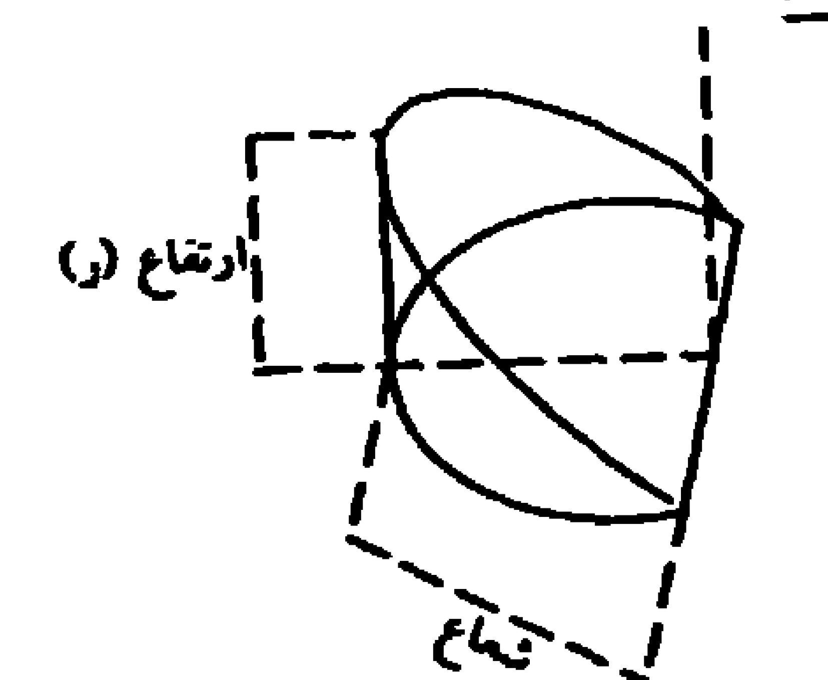
١٣ ـ قولب طوقي:

الحجم = $\frac{\pi^{٢}}{٤} \times \text{ق}_{١} \times \text{ق}_{٢}$.



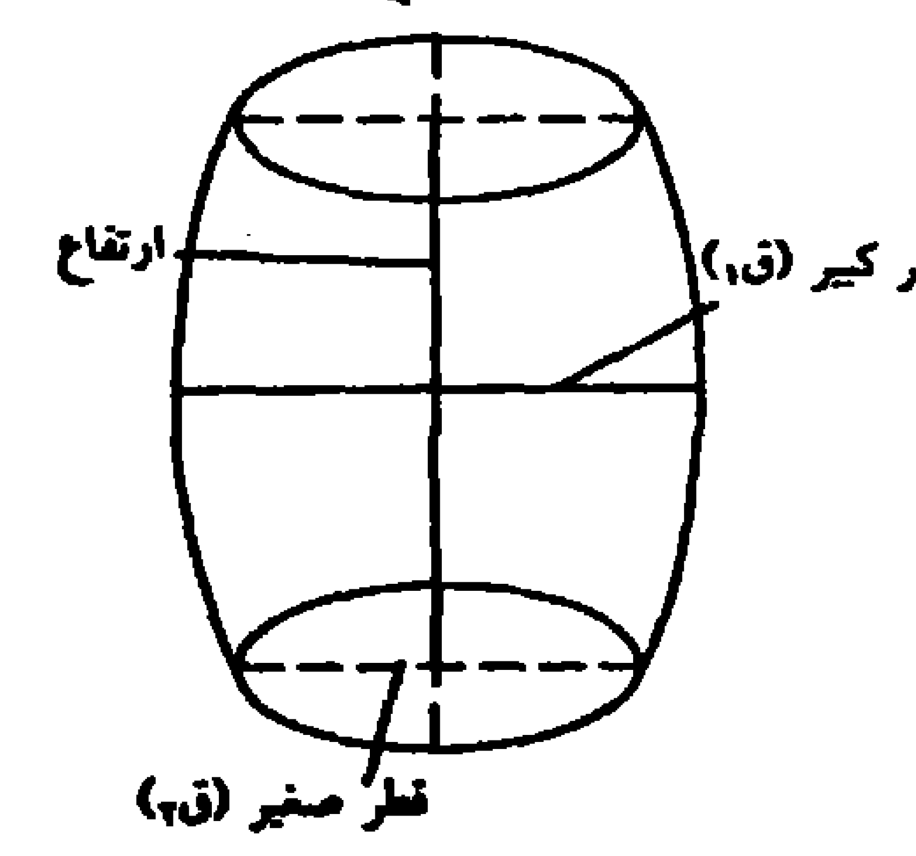
١٤ ـ جذع اسطواني:

الحجم = $\frac{\pi}{٤} \text{ ق}^{٢} \times \text{ر}$.



١٥ ـ ظفر إسطواني:

الحجم $\frac{٢}{٥}$ شعاع × شعاع × ارتفاع.



١٦ ـ البرميل:

الحجم = $\frac{\pi}{١٢} \times$ الارتفاع $(٢ \text{ ق}_{١}^{٢} + \text{ق}_{٢}^{٢})$.

الفصل التاسع عشر

الهندسة التحليلية

I الدائرة:

١ ـ تعريف: الدائرة مجموعة نقط المستوى التي تبعد عن نقطة ثابتة فيه بعداً ثابتاً؛ وأن النقطة الثابتة تدعى مركز الدائرة: والبعد الثابت يدعى: نصف القطر.

إذا كان مركز الدائرة م. (س.، ع.) ونصف قطرها نق فإن معادلة هذه الدائرة هي:

$$(س - س_.)^2 + (ع - ع_.)^2 = نق^2 \quad (١)$$

تدعى هذه المعادلة: الشكل النموذجي لمعادلة الدائرة.

وفي حالة خاصة إذا كان مركز الدائرة في م فإن معادلة الدائرة تؤول إلى: $س^2 + ع^2 = نق^2$.

ومن ثم تصل إلى: $س^2 + ع^2 + ب\,س + حـ\,ع + و = ٠$ (٢)

وهذا هو الشكل العام لمعادلة الدائرة.

٢ ـ قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة:

تعريف: لتكن الدائرة د (م، نق) في مستوٍ (ى) وليقطع تابعاً نـد: ى ⟵ ح: ن ⟵ $ل^2$ [ن م] − $نق^2$

ندعوه تعريفاً: «تابع القوة للدائرة»

٣ ـ المحور الأساسي لدائرتين في مستوٍ:

تعريف: «المحور الأساسي لدائرتين $د_1$ ($م_1$، $نق_1$)، $د_2$ ($م_2$ ، $نق_2$) في مستوٍ (ى) هو مجموعة نقط المستوى ى التي تتساوى قوتا كل منها بالنسبة إلى الدائرتين $د_1$، و $د_2$»

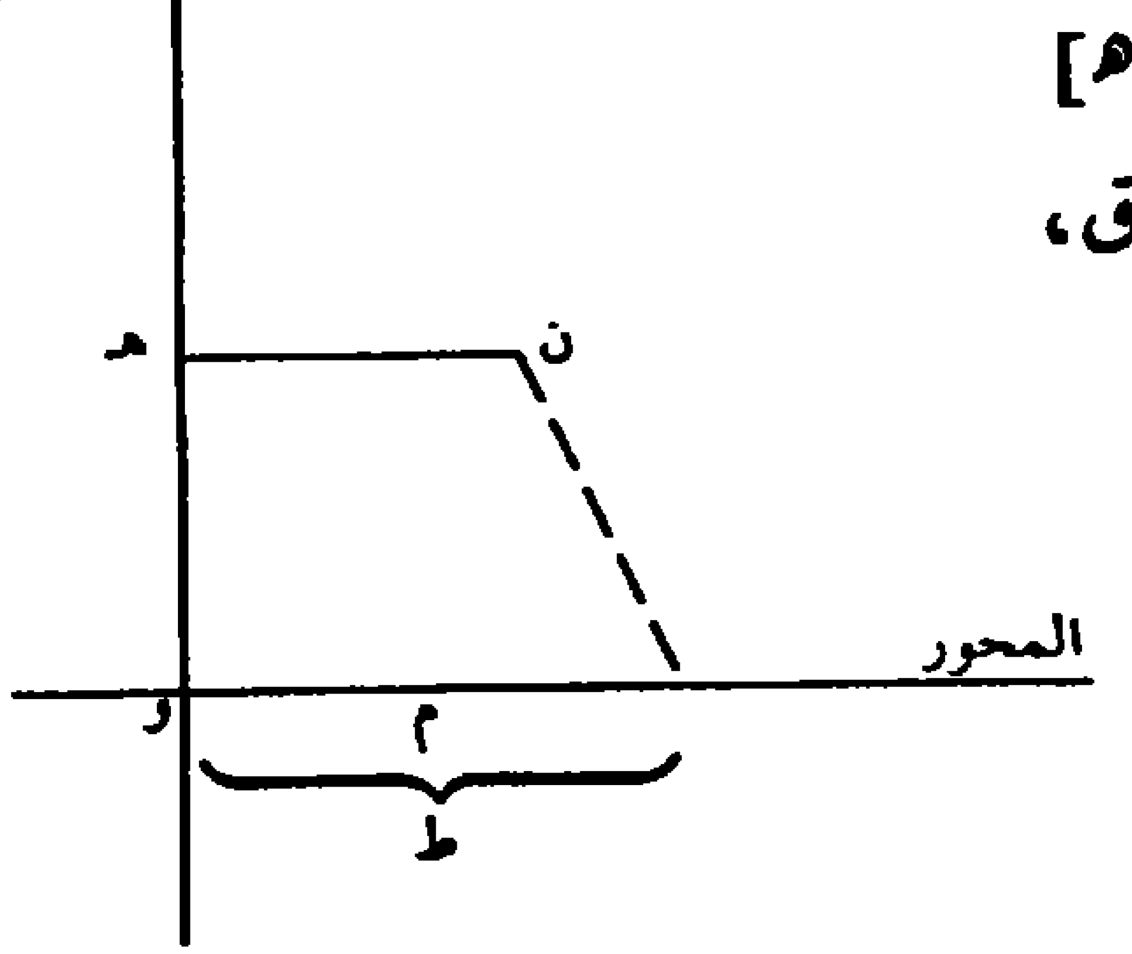
نتيجة: المحور الأساسي لدائرتين متقاطعتين هو المستقيم الذي يحوى الوتر المشترك للدائرتين.

- تقنية: إن النقط المشتركة بين دائرتين $د_1$ و $د_2$ هي النقط المشتركة بين أيّ من هاتين الدائرتين والمحور الأساسي لهما». .

إذاً النقط المشتركة بين الدائرتين هي النقط المشتركة بين محورهما الأساسي وأي منهما.

II القطع المكافئ :

١ - تعريف: في مستو (ى) إذا كان Δ مستقيماً معلوماً وكانت ه نقطة ثابتة (ه $\neq \Delta$) فإننا ندعو مجموعة نقط هذا المستوى التي يتساوى بعدا كل منها عن Δ، ه قطعا مكافئاً. فإذا كانت ن نقطة من هذا القطع (الشكل ٤) وكأن م موقع العمود المرسوم منها على Δ فإن:



ن $\in$ القطع ء $\Leftrightarrow$ ل [ن ه] = ل [ن م]

ندعو Δ دليل القطع المكافئ؛ ه المحرق،

بعد ه عن Δ «الوسيط» ونرمز «ط»

(ل [ه و] = ط > ٠)

العمود على الدليل Δ المرسوم من ه «المحور»

وإذا كانت و نقطة تقاطع المحور والدليل فإن منتصف [ه و] وليكن م يدعى: «ذروة القطع».

معادلة هذا القطع المكافئ: $ع^2 = ٢ ط س$

إذا كان ٢ ط س $\geqslant$ ٠ هذا يعني أن س $\geqslant$ ٠ فجميع نقط هذا القطع المكافئ في نصف المستوى [$\overrightarrow{ع ع}$، ه

٢ - بعض القضايا:

- المحور المحرقي محور تناظر للقطع المكافئ.

- إن القطع المكافئ منحنى غير مغلق في عملية سحب محوري الإحداثيات يصبح معنا:

س = س. + سہ

ع = ع. + عہ

وندعو هذين الدستورين: «دستوري سحب محوري الإحداثيات»

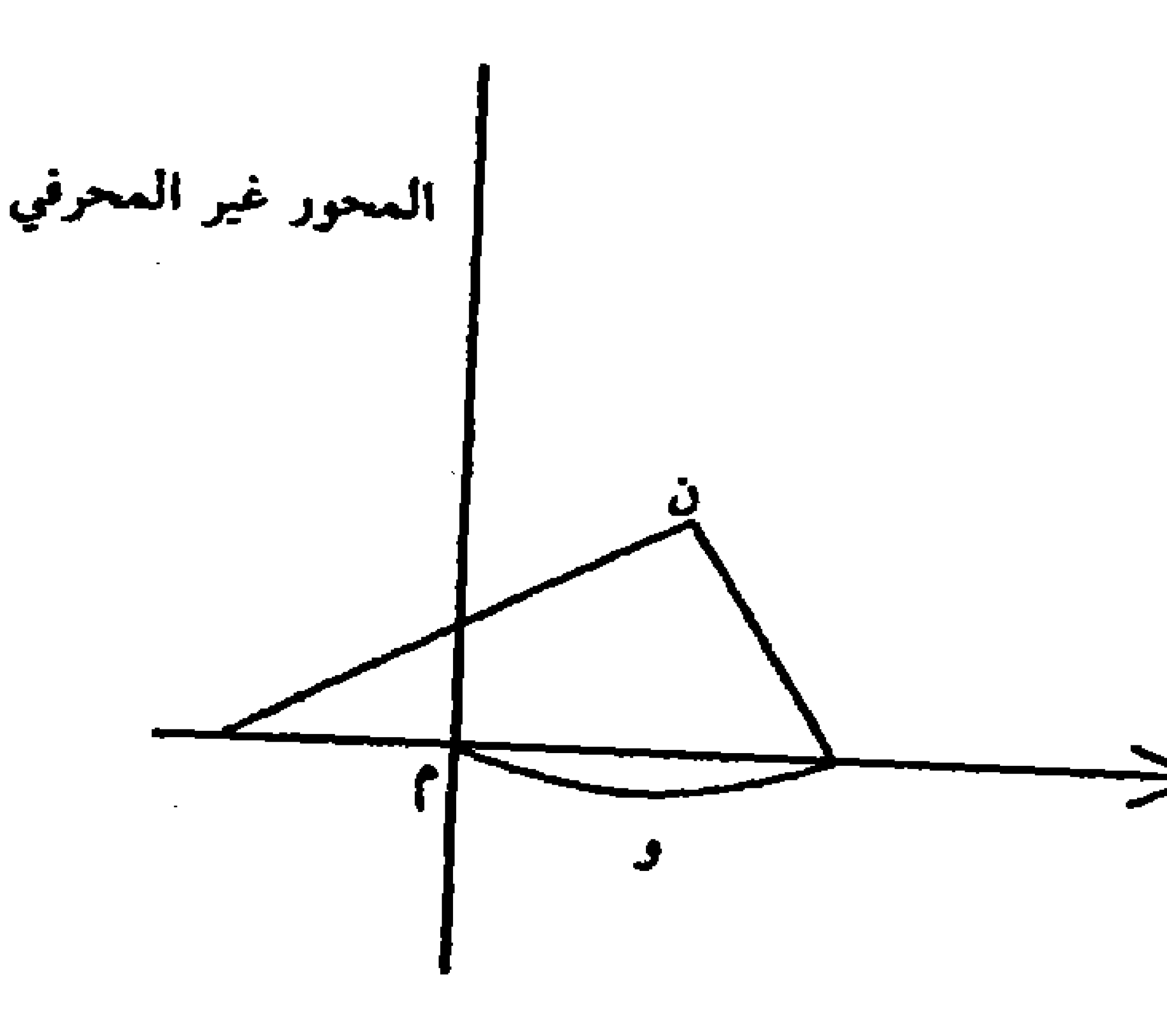
III القطع الناقص:

١ ـ تعريف: إذا كانت ه، ه' نقطتين معلومتين في مستو (ى) فإننا ندعو مجموعة نقط هذا المستوى التي يكون مجموع بعدي كل منها عن هاتين النقطتين ثابتاً قدره:
٢ ب (ب ∈ ح**) قطعاً ناقصاً.

وهكذا فإن:

ن ∈ القطع الناقص ⇔ ل [ن ه] + ل [ن ه'] = ٢ ب

- نرمز ل [ه ه'] بالرمز ٢ ى (ى ∈ ح*+)
- إذا كانت ن نقطة من هذا القطع لا تنتمي إلى ه ه' فإن وجود ن ⇔ وجود المثلث ن ه ه'.



⇐ ل [ن ه] + ل [ن ه'] > ل [ه ه']

⇐ ٢ ب > ٢ ى

⇐ ب > ى

ندعو ه، ه' محرقي القطع.

ه ه' المحور المحرقي، محور القطعة [ه ه'] المحور اللامحرقي ل [ه ه'] = ٢ ى البعد المحرقي.

منتصف [ه ه′] مركز القطع ونرمزه غالباً م أو م. وإذا كانت ن $\in$ القطع الناقص فإننا ندعو

ل [ه ن] نصف القطر المحرقي المتعلق بالمحرق ه ونرمزه ر

ل [ه′ ن] نصف القطر المحرقي المتعلق بالمحرق ه′ ونرمزه ر′

فيكون ر + ر′ = ٢ ب

وندعو بُعد ن عن مركز القطع م : نصف القطر.

ونلاحظ أن نصف القطر في القطع الناقص متغير خلافاً لنصف قطر الدائرة.

وندعو كل قطعة مستقيمة محدودة بنقطتين متمايزتين مع القطع: وتراً. فإذا مرَّ هذا الوتر من المحرق دعي وتراً محرقياً.

وإذا مرّ من مركز القطع دعي قطراً (الأقطار ليست جميعاً متساوية طولاً)

وندعو نقط القطع التي تنتمي إلى محوره المحرقي أو إلى محوره اللامحرقي ذرى القطع.

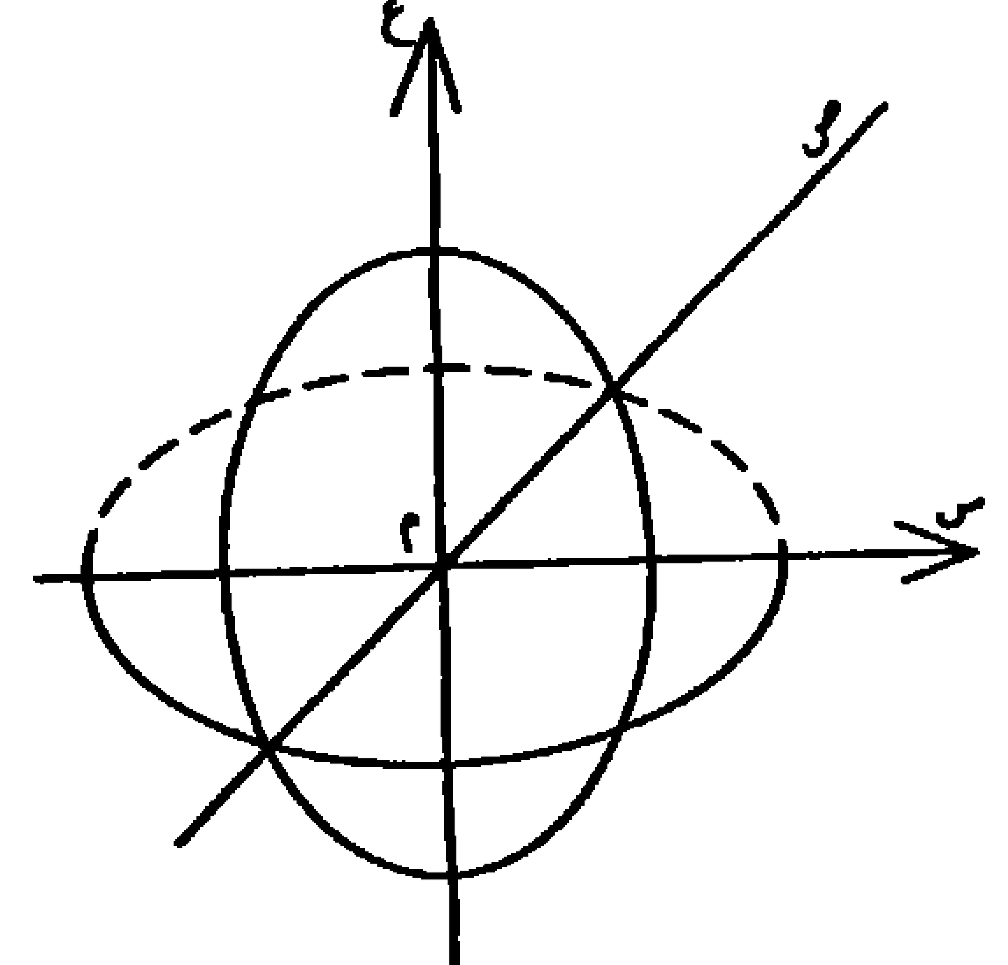
٢ ـ المعادلة المختزلة للقطع الناقص.



$|$حـ^٢ = ب^٢ − ء^٢، حـ > ٠

أو $\boxed{\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ع^٢}{حـ^٢} = ١}$

٣ ـ قضايا تتعلق بالقطع الناقص.



- القطع الناقص متناظر بالنسبة إلى محوره اللامحرقي
- القطع الناقص متناظر بالنسبة إلى محوره المحرقي. وفقاً لتحويل التناظر بالنسبة إلى المنعطف الأول تصبح المعادلة

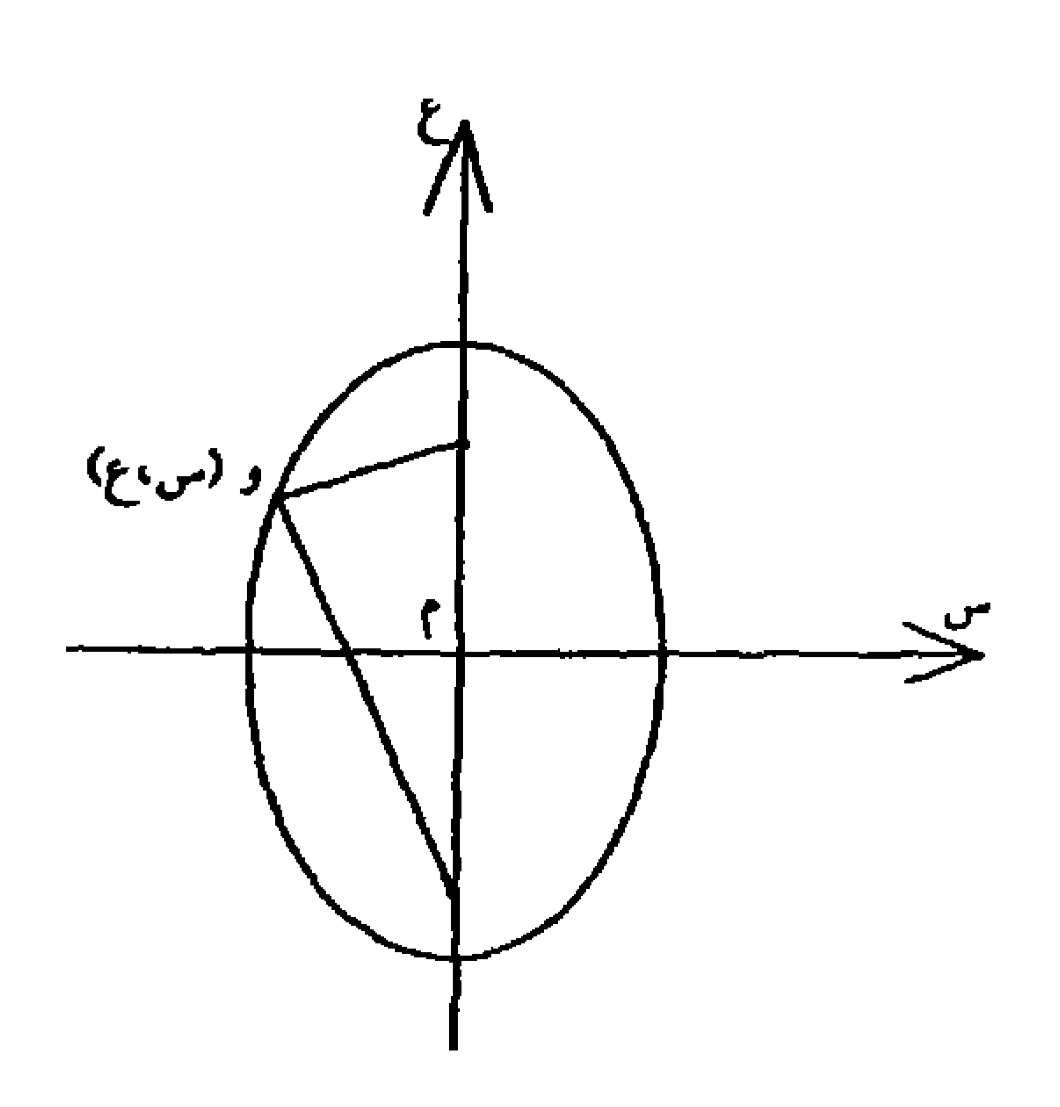
$$\frac{ع^٢}{ب^٢} + \frac{س^٢}{حـ^٢} = ١$$

وهي المعادلة المختزلة للقطع الناقص الذي يكون محوره المحرقي محور العينات واللامحرقي محور السينات. ففي هذه الحالة:

ر = ب − ء ع / م

ر′ = ب + ء ع / م

مساحة القطع الناقص = π. ب. حـ.



IV القطع الزائد

١ ـ تعريف: إذا كانت ه ه′ نقطتين معلومتين في مستو (ى) فإننا ندعو مجموعة نقط هذا المستوى التي يكون فرق بعدي كل منها عن هاتين النقطتين ثابتاً قدره ٢ ب (ب ∈ ح*+) قطعاً زائداً: فإن:

ن ∈ القطع الزائد ⇔ [ل [ن ه′] − ل [ن ه]] = ٢ ب

لاحظ الشكل:

نرمز ل [ه ه′] بالرمز ٢ ء

إن وجود نقطة ن ∉ ه ه′ ⇐

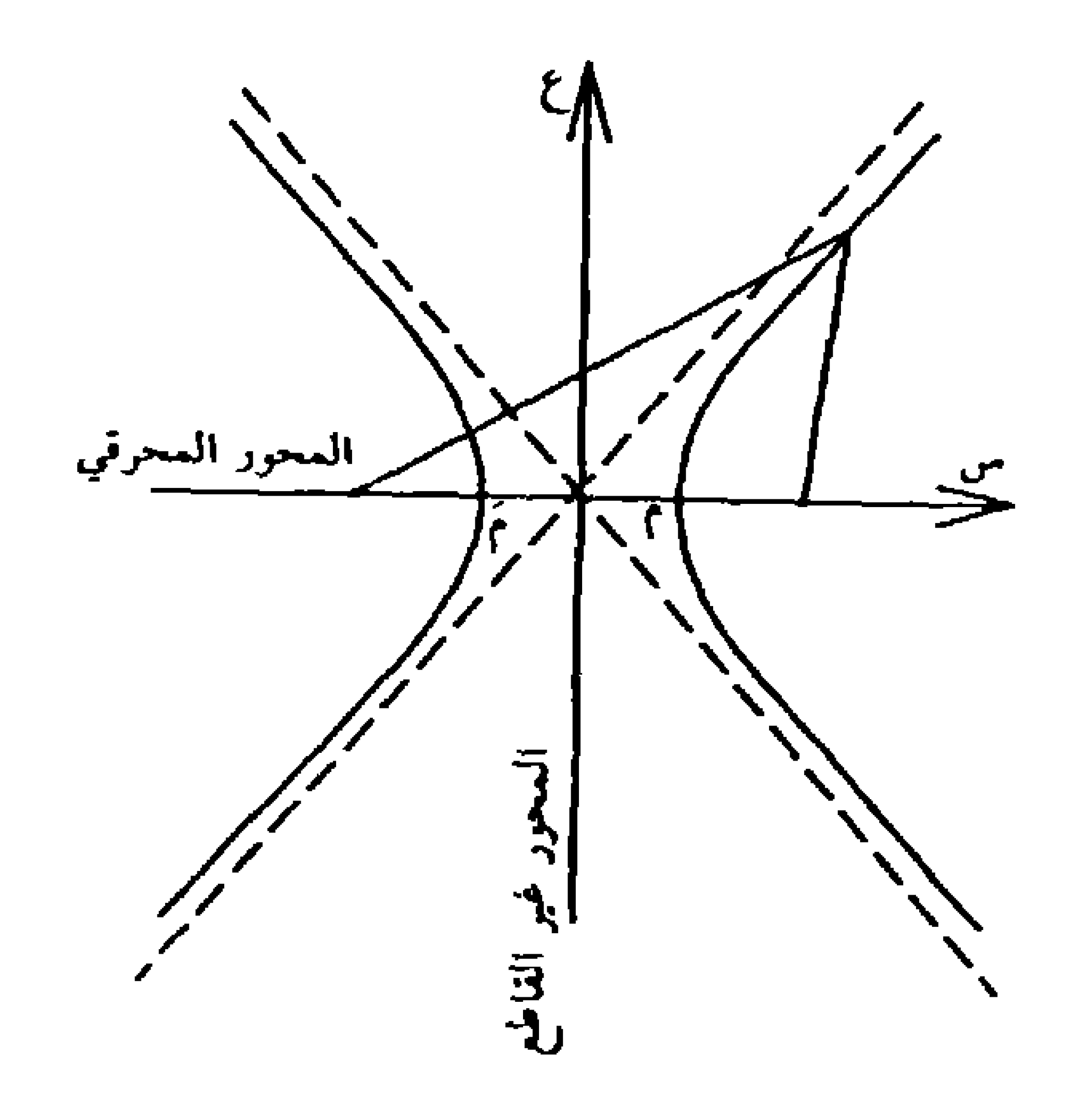
وجود ن ه ه′ ⇐

|ل [ن ه′] − ل [ن ه]| < ل [ه ه′]

أي ٢ ب < ٢ ء

⇐ ب < ء

ه ه′ المحرقان، ه ه′ المحور المحرقي ل [ه ه′] = ٢ ء البعد المحرقي. منتصف [ه ه′] مركز القطع، محور [ه ه′] المحور اللامحرقي ل [ن ه′] = ر′، ل [ن ه] = ر نصفا القطرين المحرقين الموافقتين للنقطة ن. وتستخدم كلمة: القطر، نصف القطر، الوتر، الوتر المحرقي كما استعملت في القطع الناقص.



٢ ـ ملاحظات:

ـ إن كل نقطة ن من محور [ى′ ى] تحقق العلاقة

$|$ل [هـ ى′] − ل [هـ ى]$| = ٠$

$|$ل [هـ ى] − ل [هـ ى′]$|$ ≠ ٢ ب ⇐ هـ ∌ قطع زائد محرقاه ى، ى′ أي أن القطع الزائد لا يقطع هذا المحور

لذلك نسمي المحور اللامحرقي أيضاً «المحور غير القاطع» إذا كان ل [ن ى′] > ل [ن ى]،

ل [ن ى′] − ل [ن ى] = ٢ ب فإن ن أقرب إلى ى منها إلى ى′. ونقول إن ن نقطة من الفرع المتعلق بالمحرق ى وإذا كان ل [ن ى′] < ل [ن ى]،

ل [ن ى] − ل [ن ى′] = ٢ ب فإن ن أقرب إلى ى′ منها إلى ى ونقول: إن ن نقطة من الفرع المتعلق بالمحرق ى′.

٣ ـ معادلة القطع الزائد:

الصيغة المختزلة: $\frac{س^٢}{ب^٢} - \frac{ع^٢}{حـ^٢} = ١$

$ح^٢ = ى^٢ - ب^٢$

٤ ـ قضايا تتعلق بالقطع الزائد:

ـ القطع الزائد متناظر بالنسبة إلى محوره اللامحرقي.

- القطع الزائد متناظر بالنسبة إلى محوره المحرقي.
- القطع الزائد متناظر بالنسبة إلى مركزه
- بالاعتماد على الخصائص التناظرية نستنتج أن للقطع الزائد مقاربين:

ع = $\frac{حـ}{ب}$ س مقارب للقوسين الواقعين في الربع الأول والثالث

ع = $\frac{حـ}{ب}$ س مقارب للقوسين الواقعين في الربع الثاني والرابع

- المعادلتين الوسيطتان للقطع الزائد:

س = $\frac{ب}{جب ر}$ + س.

ع = حـ طل ز + ع. ز ∋ ح / {$\frac{\pi}{٢}$ + ك π}

إذا أننا لو حذفنا الوسيط ر لنتجت المعادلة الديكارتية ذاتها.

- التحديد الموجز للقطوع: القطع (المتميز عن الدائرة) هو مجموعة نقط المستوى التي تكون نسبة بعد كل منها عن نقطة ثابتة ه من ذلك المستوى إلى بعدها عن مستقيم ثابت △ فيه هي نسبة ثابتة عد > ٠

● فإذا كان عد > ١ فإن مجموعة النقط قطع زائد (فيه $\frac{ء}{ب}$ = ٦َ)

● وإذا كان عد = ١ فإن مجموعة النقط قطع مكافئ

● وإذا كان عد < ١ فإن مجموعة النقط قطع ناقص (فيه $\frac{ء}{ب}$ = عد).

الفصل العشرون

مراجعة عامة: حساب المثلثات

ضمن الشروط التي تضمن وجود كل من العلاقات التالية

(١، ١، ١) العلاقات الأساسية بين النسب المثلثية لزاوية ما:

$$\text{تجب}^{٢}\alpha + \text{جيب}^{٢}\alpha = ١$$

$$\text{ظل}\ \alpha = \frac{\text{حـ ب}\ \alpha}{\text{تجب}\alpha}$$

$$\text{نظل}\ \alpha = \frac{١}{\text{ظل}\ \alpha}$$

$$١ + \text{ظل}^{٢}\alpha = \frac{١}{\text{تجب}^{٢}\alpha}$$

$$١ + \text{نظل}^{٢}\alpha = \frac{١}{\text{حـ ب}^{٢}\ \alpha}$$

(١، ١، ٢) الارجاع إلى الربع الأول:

$$\text{حـ ب}\ \alpha = \text{حـ ب}\ (\pi - \alpha) = -\ \text{حـ ب}\ (\pi + \alpha) = -\ \text{حـ ب}\ (-\ \alpha)$$

$$\text{تجب}\alpha = \text{تجب}(\pi - \alpha) = -\ \text{تجب}(\pi + \alpha) = \text{تجب}(-\alpha)$$

$$\text{ظل}\ \alpha = -\ \text{ظل}\ (\pi - \alpha) = \text{ظل}\ (\pi + \alpha) = -\ \text{ظل}\ (-\ \alpha)$$

$$\text{حـ ب}\alpha = \text{تجب}\left(\frac{\pi}{٢} - \alpha\right) = -\ \text{تجب}\left(\frac{\pi}{٢} + \alpha\right)$$

$$= \text{تجب}\left(\frac{٣\pi}{٢} + \alpha\right) = \text{تجب}\left(\frac{٣\pi}{٢} - \alpha\right)$$

* تجب α = حـ ب $\left(\frac{\pi}{٢} - \alpha\right)$ = حـ ب $\left(\frac{\pi}{٢} + \alpha\right)$ =

- حـ ب $\left(\frac{٣\pi}{٢} + \alpha\right)$ = - حـ ب $\left(\frac{٣\pi}{٢} - \alpha\right)$

* طل α = تطل $\left(\frac{\pi}{٢} - \alpha\right)$ = - تطل $\left(\frac{\pi}{٢} + \alpha\right)$ =

- تطل $\left(\frac{٣\pi}{٢} + \alpha\right)$ = تطل $\left(\frac{٣\pi}{٢} - \alpha\right)$

(١، ١، ٣) إذا كانت ب، هـ، و قياسات زوايا المثلث ب حـ و فإن:

* ب + حـ + و = π وَ $\frac{ب}{٢} + \frac{حـ}{٢} + \frac{و}{٢} = \frac{\pi}{٢}$

* حـ ب (ب + حـ) = حـ ب و، حـ ب $\frac{ب + حـ}{٢}$ = تجب $\frac{و}{٢}$

* تجب(ب + حـ) = - تجب و، تجب $\frac{ب + حـ}{٢}$ = تجب $\frac{و}{٢}$

* طل (ب + حـ) = - طل و (مع و $\neq \frac{\pi}{٢}$)، طل $\frac{ب + حـ}{٢}$ = مطل $\frac{و}{٢}$

(١، ١، ٤) حـل المـعـادلـة حـ ب س = حـ ب α هـو:

س = α + ك × ٢ π أو: س = π - α + ك × ٢ π

حل المعادلة تجب س = تجبα هو: س = α + ك × ٢ π

حل المعادلة طل س = طل α هو: س = α + ك × π

حل المعادلة حـ ب = ٠ هو: س = ك ٠ π

حل المعادلة: حـ ب س = ٠ هو: س = ك × π

تجب س = ٠ هو: س = $\frac{\pi}{٢}$ ٠ ك ٠ π

طل س = ٠ هو: س = ك × π

مع ك ∋ ص

(١، ١، ٥) دساتير الجمع والطرح.

$$\text{حـب}(\text{ب} + \text{حـ}) = \text{حب ب حب ب تجب حـ} + \text{تجب ب حب ح}$$

$$\text{تجب}(\text{ب} + \text{حـ}) = \text{تجب ب تجب حـ} - \text{حب ب حب ح}$$

$$\text{حب}(\text{ب} - \text{حـ}) = \text{حب ب نجب ح} - \text{تجب ب حب حـ}$$

$$\text{تجب}(\text{ب} - \text{حـ}) = \text{تجب ب تجب حـ} + \text{حب ب حب حـ}$$

$$\text{طل }(\text{ب} + \text{حـ}) = \frac{\text{طل ب} + \text{طل هـ}}{1 - \text{طل ب طل هـ}} \quad \text{ضمن شروط تعريفها}$$

$$\text{طل }(\text{ب} - \text{حـ}) = \frac{\text{طل ب} - \text{طل حـ}}{1 + \text{طل ب طل حـ}} \quad \text{ضمن شروط تعريفها}$$

(١، ١، ٦) دساتير ضعفي الزاوية ضمن شروط تعريفها

$$\text{حـب ٢ س} = \text{٢حـب تجب س} = \frac{\text{٢ طل س}}{1 + \text{طل}^{2}\text{ س}}$$

$$\text{تجب٢س} = \text{تجب}^{2}\text{ س} - \text{حـب}^{2}\text{س} = \text{٢تجب}^{2}\text{س} - 1 = 1 - \text{٢ حـب}^{2}\text{ س} = \frac{1 - \text{طل}^{2}\text{ س}}{1 + \text{طل}^{2}\text{ س}}$$

$$\text{طل}^{2}\text{ س} = \frac{\text{٢ طل س}}{1 - \text{طل}^{2}\text{ س}}$$

(١، ١، ٧) دساتير نصف الزاوية: ضمن شروط تعريفها

$$\text{حـب}^{2}\ \frac{\text{س}}{2} = \frac{1 - \text{تجب س}}{2}$$

$$\text{ء ب}^{2}\ \frac{\text{س}}{2} = \frac{1 - \text{تجب س}}{2}$$

$$\text{طل}^{2}\ \frac{\text{س}}{2} = \frac{1 - \text{تجب س}}{1 + \text{تجب س}}$$

(١، ١، ٨) متطابقتان شهيرتان

حـ ب^{٢} ب − حـ ب^{٢} حـ = حـ ب (ب + حـ) حب (ب − حـ)

تجب^{٢}ب + تجب^{٢}حـ − ١ = تجب(ب + حـ) تجب(ب − حـ)

(١، ١، ٩) دساتير ثلاثة أمثال الزاوية

حـ ب ٣ س = ٣ حـ ب س − ٤ حـ ب^{٣} س

تجب٣س = ٤ تجب^{٣}س − ٣تجب س

(١، ١، ١٠) دساتير التحويل

[هي الدساتير التي تسمح بالانتقال من مجموع نسبتين مثلثيتين إلى جداء، وبالعكس]

حـ ب (ب + حـ) + حـ ب (ب − حـ) = ٢ × حب ب تجب حـ

حـ ب (ب + حـ) − حـ ب (ب − حـ) = ٢ تجب ب حـ ب حـ

تجب(ب + حـ) + تجب(ب − حـ) = ٢ تجب ب تجب حـ

تجب(ب + حـ) − تجب(ب − حـ) = ٢ جب ب جب حـ

فإذا فرضنا: ب + حـ = س

ب − حـ = ع

نجد: ب = (س + ع)/٢ ، حـ = (س − ع)/٢

وبالتبديل في الدساتير السابقة نجد:

حـ ب س + حـ ب ع = ٢ حـ ب (س − ع)/٢ ى ب (س − ع)/٢

حـ ب س − حـ ب ع = ٢ ى ب (س + ع)/٢ حـ ب (س − ع)/٢

تجب س + تجب ع = ٢ ى ب (س + ع)/٢ ى ب (س − ع)/٢

تجب س − تجب ع = ٢ تجب (س + ع)/٢ حـ ب (س − ع)/٢

(١، ١، ١١) تحويل العبارة ى = ب تجب س + حـ جيب س مع ب، حـ $\neq$ صفر.

نعلم أن:

$جب(\alpha + س) = جب \alpha تجب س + تجب \alpha جب س$

$جب(\alpha - س) = جب \alpha تجب س - تجب \alpha جب س$

$تجب(\alpha + س) = تجب \alpha تجب س - جب \alpha جب س$

$تجب(\alpha - س) = تجب \alpha تجب س + جب \alpha جب س$

ومن الواضح أن أياً من النتائج السابقة هو من الشكل ب تجب س + حـ جب س الأمر الذي يدعونا لتساؤل هل كل عبارة من الشكل ب تجب س + حـ جب س يمكن أن تكتب بأحد الأشكال السابقة؟

للإجابة عن التساؤل نميز حالتين:

(١) $ب^{٢} + حـ^{٢} = ١$

يمكننا في هذه الحالة أن نجد زاوية α حيث

$تجب \alpha = ب$ وَ $جب \alpha = حـ$.

فالعبارة: $ى = ب تجب س + حـ جب س$ تكتب $ى = تجب \alpha تجب س + جب \alpha جب س$

أو $ى = تجب(س - \alpha)$

(٢) $ب^{٢} + حـ^{٢} \neq ١$

في هذه الحالة نبحث عن عدد هـ إذا ضربنا به طرفي العبارة:

$ى = ب تجب س + حـ جب س$

أعادها إلى الحالة الأولى أي:

$هـ \cdot ى = هـ \cdot ب تجب س + هـ \cdot حـ جب س$

حيث: $(هـ + ب)^{٢} + (هـ + حـ)^{٢} = ١$

أو $هـ^{٢} (ب^{٢} + حـ^{٢}) = ١$

فيكون: $هـ^{٢} = \frac{١}{ب^{٢} + حـ^{٢}} \Leftarrow هـ = \pm \frac{١}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} : \frac{ى}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}}$

$= \frac{ب}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} تجب س + \frac{حـ}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} ح ب س$ أو

$$\text{ى} = \sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}\left(\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}}\,\text{تجب س} + \frac{\text{حـ}}{\sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}}\,\text{حـ ب س}\right)$$

وبما أن $\left(\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{حـ}}{\sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}}\right)^{2} = 1$ نستطيع أن نجد زاوية α تحقق:

$\text{تجب}\alpha = \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}}$، $\text{حـ ب}\,\alpha = \frac{\text{حـ}}{\sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}}$ فـإذا بدلنـا في ذلك العبارة نجد:

$\text{ى} = \sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}\ (\text{تجب}\alpha\ \text{ى ب س} + \text{حـ ب}\alpha\ \text{حـ ب س})$ أو:

$\text{ى} = \sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}\ \text{ى ب}\ (\text{س} - \alpha)$.

(١، ١، ١٢) ملاحظة

وجـدنـا أن: $\text{ى} = \sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}\ (\text{تجب}\alpha\ \text{س} + \text{حـ ب}\ \alpha\ \text{س})$ ويمكن كتـابتهـا بالشكل:

$\text{ى} = \sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}} \cdot \text{ى ب}\ \alpha\ \left(\text{تجب س} + \frac{\text{حـ ب}\alpha}{\text{تجب}\alpha}\,\text{حـ ب س}\right)$ لأن $\alpha \neq$ صفر

$$= \sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}} \times \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ب}^{2} \times \text{ح}^{2}}}\ (\text{ى ب س} + \text{طل}\ \alpha\ \text{حـ ب س})$$

أو $\text{ى} = \text{ب}\ (\text{تجب س} + \text{طل}\ \alpha\ \text{حـ ب س})$

أي إنه يمكن تحويل العبارة $\text{ى} = \text{ب تجب س} + \text{حـ حـ ب س}$ بإخراج العامل ب خارج قوسين فتصبح $\text{ى} = \text{ب}\ \left(\text{تجب س} + \frac{\text{ح}}{\text{ب}}\,\text{حـ ب س}\right)$ ثم نجد الزاوية α حيث $\text{طل}\ \alpha = \frac{\text{ح}}{\text{ب}}$

(١، ١، ١٣) هجاء تحويل العبارة $\text{ى} = \text{ب تجب س} + \text{حـ ب س}$ (عبارة خطية في تجب س، حـ ب س).

١ - نحسب $\sqrt{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}$

٢ ـ نكتب العبارة بالشكل:

$$ي = \sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}} \left(\frac{ب}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} تجب\, س + \frac{حـ}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} حـب\, س \right)$$

٣ ـ نبحث عن زاوية α

$$٢ تجب\alpha = \frac{ب}{\sqrt{ب^{٢} + حـ^{٢}}} ، حـب\, \alpha = \frac{حـ}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}}$$

نبدل في العبارة فنجد:

$$ى = \sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}\ تجب\, (س - \alpha)$$

٤ ـ إذا اخترنا الزاوية $\beta = \frac{\pi}{٢} - \alpha$ يكون:

$$جب\, \beta = \frac{ب}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} ، تجب\, \beta = \frac{حـ}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}}$$

فالعبارة ى تؤول إلى الشكل

$$ى = \sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}\ حـب\, (س + \beta)$$

(١، ١، ١٤) توظيف تحويل العبارة في حل بعض المعادلات المثلية

١ ـ المعادلة من الشكل:

$$ب\ تجب\, س + حـ\, حـب\, س = و \quad ومع\ ب\ حـ\ و \neq ٠$$

إن الطرف الأول من هذه المعادلة هو عبارة خطية في حـب س، تجب س وتحل وفق التدرج التالي:

١ - نقسم طرفي المعادلة على $\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}$ فنجد:

$$\frac{ب}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} \text{تجب س} + \frac{حـ}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} \text{حـ ب س}$$

$$= \frac{و}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}}$$

٢ - نفرض تجب $\alpha = \frac{ب}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}}$، حـ ب $\alpha = \frac{حـ}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}}$

وبالتبديل في المعادلة يمكننا كتابتها بالشكل:

$$\text{تجب}(س - \alpha) = \frac{و}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}}$$

فإذا كان: $\frac{و}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} \in [-١، +١]$ فرضناه ء ب β وتصبح المعادلة ء ب

$(س - \alpha) = \text{تجب } \beta$

وحلها:

$س - \alpha = \pm \beta + ك \times ٢ \pi$

$س = \alpha \pm \beta + ك \times ٢ \pi$

المناقشة: إن الشرط $\frac{و}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} \in [-١، +١]$

يكافئ $-١ \leqslant \frac{و}{\sqrt{ب^{٢} + ح^{٢}}} \leqslant +١$

الفصل الواحد والعشرون

العلاقات بين عناصر المثلث

إن عناصر أي مثلث ب حـ و وهي ب′، حـ′، و′، ب، حـ، و وحيث ل [حـ و]، حـ′ = ل [و ب] و′ = ل [ب حـ] وكذلك ب، حـ، و وهي قياسات الزوايا المقابلة لهذه الأضلاع على الترتيب والشكل.

(١، ٢، ١) قاعدة الجيب في المثلث ب ح و

$$ب'^2 = حـ'^2 + و'^2 - ٢\ حـ'\ و'\ \text{تجب}\ ب$$

(١، ٢، ٢) النسبة المثلثية لإنصاف زوايا المثلث ب حـ و بدلالة ب′، حـ′، و′.

* $$\text{تجب}\ \frac{ب}{٢} = \sqrt{\frac{ط\ (ط - ب')}{حـ' \cdot و'}}$$

$$\text{أو حـ ب}\ \frac{ب}{٢} = \sqrt{\frac{(ط - حـ')\ (ط - و')}{حـ'\ و'}}$$

$$\text{أي طل}\ \frac{ب}{٢} = \sqrt{\frac{(ط - حـ')\ (ط - و')}{ط\ (ط - ب')}}$$

(١، ٢، ٣) حساب سط مساحة المثلث بدلالة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

$$سط = \frac{١}{٢}\ حـ'\ و'\ \text{جيب}\ ب$$ (١)

$$\text{سط} = \frac{1}{2}\,\text{و}'\,\text{ب}'\,\text{حب حـ}$$

$$\text{سط} = \frac{1}{2}\,\text{ب}'\,\text{حـ}'\,\text{حب و}$$

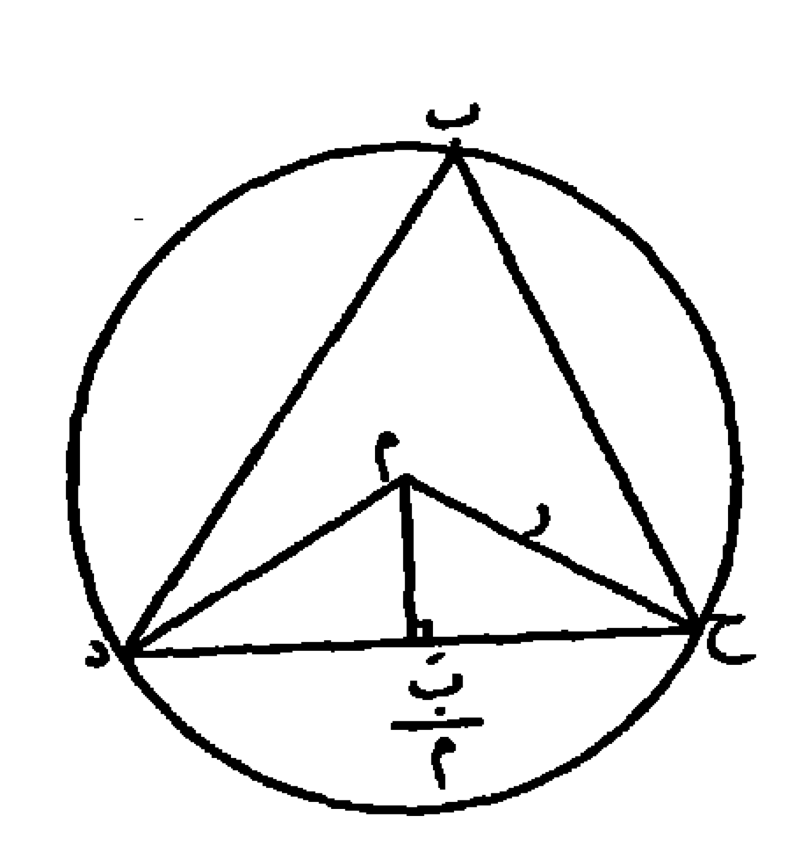
(١، ٢، ٤) علاقتا الجيوب:

* $$\frac{\text{ب}'}{\text{حب ب}} = \frac{\text{حـ}'}{\text{حب حـ}} = \frac{\text{و}'}{\text{حب و}}$$

* $$\frac{\text{ب}' - \text{حـ}'}{\text{ب}' + \text{حـ}'} = \text{طل}\,\frac{\text{و}}{2} \cdot \text{طل}\,\frac{\text{ب} - \text{حـ}}{2}$$

وتسمى علاقة الظلال في المثلث.

(١، ٢، ٥) حساب ر نصف قطر الدائرة المارة برؤوس مثلث بدلالة ضلع والزاوية له.



$$\frac{\text{ب}'}{\text{حب ب}} = 2\,\text{ر}$$

وبالمثل نجد $\frac{\text{حـ}'}{\text{حب حـ}} = 2\,\text{ر}$

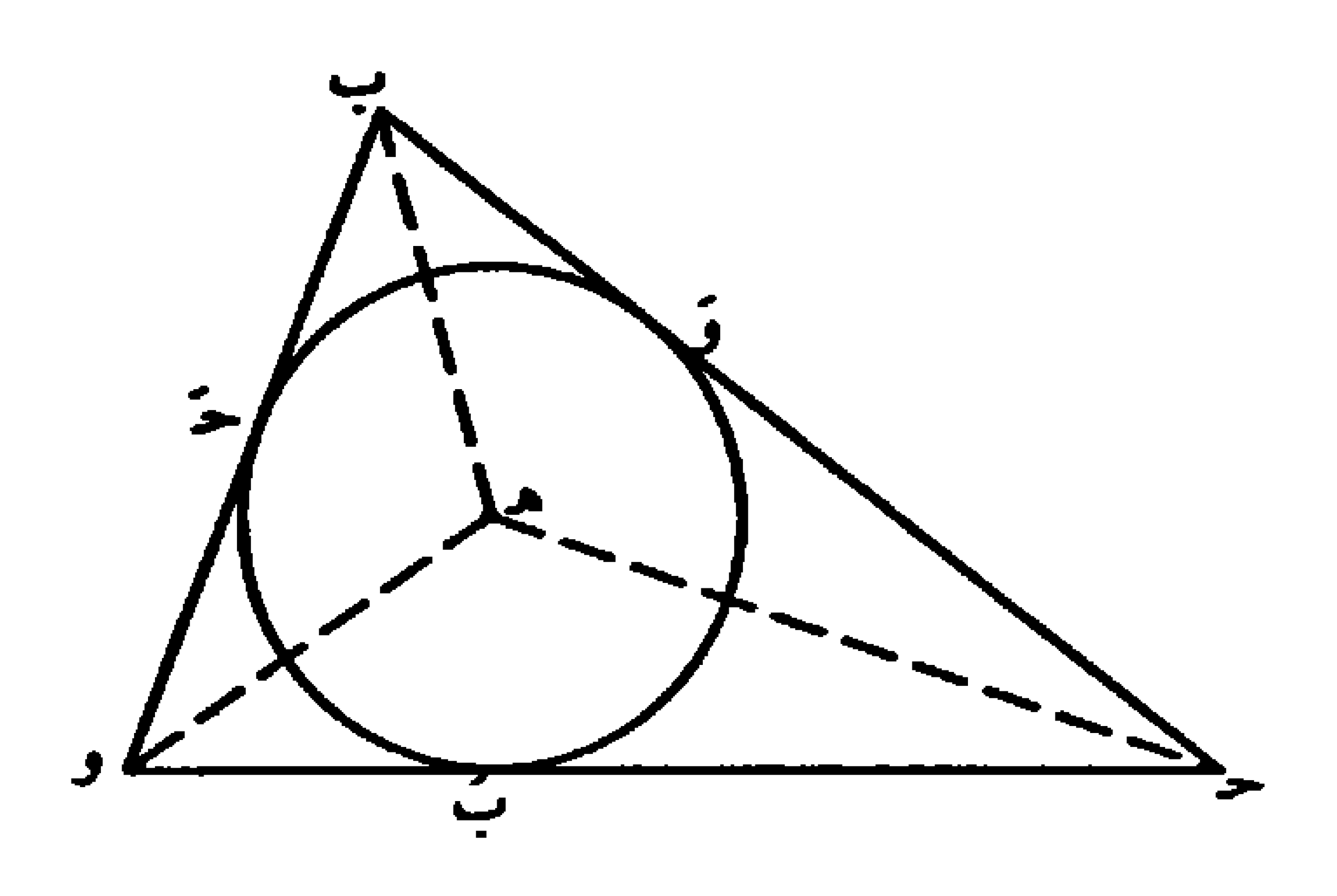
$$\frac{\text{و}'}{\text{حب و}} = 2\,\text{ر}$$

(١، ٢، ٦) $\text{سط} = \frac{\text{ب}'\,\text{حـ}'\,\text{و}'}{4\,\text{ر}}$

(١، ٢، ٧) حساب سط مساحة المثلث بدلالة ب، حـ، و، ر

$\text{سط} = 2\,\text{ر}^2\,\text{حب ب حب حـ حب و}$.

(1، 2، 8) حساب سط مساحة المثلث بدلالة بَ، حـَ، وَ ى نصف الدائرة المرسومة داخل المثلث



$$\text{سط} = \text{ط} \cdot \text{ى}$$

(1، 2، 9) حساب ى بدلالة بَ، حـَ، وَ، ب

$$\text{طل}\ \frac{\text{ب}}{2} = \frac{\text{ى}}{\text{ط} - \text{ب}}$$

$$\text{ى} = (\text{ط} - \text{ب}')\ \text{طل}\ \frac{\text{ب}}{2}$$

(1، 2، 10) حساب سط مساحة المثلث بدلالة بَ، حـَ، وَ

$$\text{سط} = \text{ح}' \cdot \text{و}' \cdot \sqrt{(\text{ط} - \text{ح}')(\text{ط} - \text{و}')}\ \sqrt{\frac{\text{ط}\ (\text{ط} - \text{ب}')}{\text{حـ}' \cdot \text{و}'}}$$

$$\text{سط} = \sqrt{\text{ط}\ (\text{ط} - \text{ب}')\ (\text{ط} - \text{ح}')\ (\text{ط} - \text{و}')}$$

$$\text{ى} = \frac{\text{سط}}{\text{ط}} = \sqrt{\text{ط}\ (\text{ط} - \text{ب}')\ (\text{ط}\ \text{ح}')\ (\text{ط} - \text{و}')}$$

$$\text{ى} = \sqrt{\frac{(\text{ط} - \text{ب}')\ (\text{ط} - \text{حـ}')\ (\text{ط} - \text{و}')}{\text{ط}}}$$

$$\text{ى} = (\text{ط} - \text{ب}')\ \sqrt{\frac{(\text{ط} - \text{حـ}')\ (\text{ط} - \text{و}')}{\text{ط}\ (\text{ط} - \text{ب}')}}$$

$$\text{ى} = (\text{ط} - \text{ب}')\ \text{طل}\ \frac{\text{ب}}{2}$$

الفصل الثاني والعشرون

المشتقات

- كل تابع تا (س) يقبل مشتقة للقيمة س = س$_{1}$، تكون مستمرة بالنسبة لهذه القيمة من المتغيِّرة.

الخاصية العكسية غير صحيحة

- يكون التابع الذي يقبل مشتقة بالنسبة لكل قيم المتغيرة المحصورة بين المدى [أ، ب]، مستمراً في هذا المدى.

جدول بأهم المشتقات

ص = تابع؛ س = متغيرة، أ، ب، ج قيم ثابتة معروفة. ص′ = المشتقة و، ي، لا توابع بحد ذاتها.

التوابع	المشتقات المقابلة
ص = أ	ص′ = صفر
ص = أ س + ب	ص′ = أ
ص = أ س^{2} + ب س + ج	ص′ = ٢ أ س + ب
ص = أ س^{ن}	ص′ = ن أ س$^{ن-1}$
ص = و + ي + لا	ص′ = و′ + ي′ + لا′
ص = و · ي	ص′ = و′ ي + و ي′
ص = و · ي · لا	ص′ = و′ ي لا + وي′ لا + وي′ لا + وي لا′

$ص = \frac{و}{ي}$ $\qquad$ $ص' = \frac{و'ي - وي'}{ي^{٢}}$

$ص = س^{ن}$ $\qquad$ $ص' = ن س^{ن-١}$

$ص = و^{ن}$ $\qquad$ $ص' = ن و^{ن-١} \cdot و'$

$ص = \sqrt{س}$ $\qquad$ $ص' = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$ص = \sqrt{و}$ $\qquad$ $ص' = \frac{و'}{٢\sqrt{و}}$

$ص = حـب\ س$ $\qquad$ $ص' = تجب\ س$

$ص = تجب\ س$ $\qquad$ $ص' = -\ جب\ س$

$ص = ظل\ س$ $\qquad$ $ص' = \frac{١}{تظل^{٢}\ س}$

$ص = تظل\ س$ $\qquad$ $ص' = \frac{-١}{حب^{٢}\ س}$

$ص = حـب\ و$ $\qquad$ $ص' = تجب\ و \cdot و'$

$ص = تجب\ و$ $\qquad$ $ص' = -\ جب\ و \cdot و'$

$ص = طل\ و$ $\qquad$ $ص' = \frac{و'}{تجب^{٢}\ و}$

$ص = تظل\ و$ $\qquad$ $ص' = \frac{-و'}{تجب^{٢}و}$

$ص = تا\ (و)$ $\qquad$ $ص' = ص'_{و} \cdot و'_{س}$

الفصل الثالث والعشرون

التوابع السابقة (المتكاملة)

- نطلق اسم تابع سابق للتابع ص (س) وهو تابع آخر صا (س) الذي يقبل ص (س) كمشتقة.
- إذا كان التابع ص (س) يقبل تابعاً سابقاً، فهو يقبل عدد لا متناه من التوابع التي تختلف عن بعضها بكمية ثابتة

جدول ببعض التوابع السابقة

التوابع	التوابع السابقة
$ا$	$ا س + ب$
$س^{ن}$ $(ن \neq - ١)$	$\frac{س^{ن+١}}{ن + ١} + ب$
$ا س^{ن} + ب س + ج$	$\frac{ا س^{٣}}{٣} + \frac{ب س^{٢}}{٢} + ج س + د$
$\frac{١}{(س - ١)^{٢}}$	$\frac{- ١}{س - ١} + ج$
جب س	تجب س + ج
تجب س	حـ ب س + ج
حـ ب ن س	$\frac{\text{تجب ن س}}{ن} + ج$
تجب ن س	$\frac{\text{حـ ب ن س}}{ن} + ج$

$\frac{١}{\text{تجب}^{٢}\text{س}}$ طل س + ج

$\frac{١}{\text{حـب}^{٢}\text{ س}}$ - تطل س + ج

جب^{٢} س = $\frac{١}{٢}$ (١- تجب ٢ س) ← $\frac{\text{س}}{٢}$ - $\frac{\text{جب٢ س}}{٢}$ +ج

$\frac{\text{حـب ٢ س}}{٤}$ + ج

تجب^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + تجب٢س) $\frac{\text{س}}{٢}$ $\frac{\text{حـب ٢ س}}{٤}$ + ج

الفصل الرابع والعشرون

المتتاليات

١ـ المتتالية الحسابية

تعريف: نطلق اسم متتالية حسابية على متسلسلة مرتبة لأعداد تسمى حدود المتتالية، وحيث أن كل عدد منها يعادل العدد الذي يسبقه مضاف إليه الثابتة π تدعى نسبة المتوالية

مثلاً: ÷ ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢، . . . .

÷ ١١، ٨، ٥، ٢، -١، . . .

- لحساب حد معين من الصف n نطبق الصيغة

$$a_n = a_1 + (n - 1) r$$

- في متتالية حسابية، يكون مجموع حدين على نفس البعد من طرفي المتتالية معادلاً لمجموع الحدين الطرفين.

$$a_i + a_j = a_1 + a_n$$

- مجموع حدود المتتالية الحسابية

$$S = \left[\frac{n}{2} 2a_1 + (n - 1) r \right]$$

- لحساب المعدل الوسطي الحسابي

$$r = \frac{b - a}{m + 1}$$

٢- المتتالية الهندسية

تعريف: نطلق اسم متتالية هندسية على متسلسلة مرتبة للأعداد، تدعى حدود المتتالية، حيث إن كل حد يعادل العدد السابق مضروب بثابتة q تدعى نسبة المتوالية.

أمثلة: ١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ٣٢، . . .

٩، ٣، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٩}$

في الأولى q = ٢ وفي الثانية q = $\frac{١}{٣}$

- لحساب حد معين من الصف n نطبق الصيغة التالية:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

- في متتالية هندسية يكون حاصل ضرب أي حدين على نفس البعد من الأطراف، حاصل ضرب الأطراف

$$a_i \cdot a_j = a_1 \cdot a_n$$

- مجموع حدود المتتالية الهندسية $S_n = a_1 \frac{q^{n-1}}{q-1}$

- لحساب المعدل الوسطي الهندسي: $q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$

الفصل الخامس والعشرون

الفائدة

١ـ الفائدة البسيطة

$$\text{الفائدة السنوية} = \frac{\text{رأس المال} \times \text{السعر}}{١٠٠}.$$

$$\text{الفائدة البسيطة} = \frac{\text{رأس المال} \times \text{السعر} \times \text{الزمن}}{١٠٠ \times \text{سنة}}.$$

$$\text{السعر} = \frac{\text{الفائدة} \times ١٠٠ \times \text{سنة}}{\text{رأس المال} \times \text{الزمن}}.$$

حساب الزمن: الفائدة الكلية ÷ الفائدة السنوية .

$$\text{الزمن} : \frac{\text{الفائدة} \times ٣٦٠}{\text{الفائدة السنوية}}.$$

$$\text{الزمن} : \frac{\text{الفائدة} \times ١٠٠}{\text{رأس المال} \times \text{السعر}}.$$

$$\text{رأس المال} : \frac{\text{الفائدة} \times ١٠٠ \times \text{سنة}}{\text{السعر} \times \text{الزمن}}.$$

$$\text{رأس المال} : \frac{\text{المبلغ المقرون بالفائدة} \times ١٠٠}{\text{مجموع مئة ليرة مع فائدتها طوال الزمن}}.$$

٢ـ الفائدة المركبة

تعريف: يقال عن مبلغ إنه وضع في فائدة مركبة، إذا كانت تضاف إليه الفوائد بعد مرور وحدة زمنية معينة. هكذا تضاف الفائدة إلى المبلغ ثم تحسب فائدة الفائدة بالنسبة للزمن الذي يلي:

- في الحالة الأولى إذا كان n عدد الوحدات الزمنية و r الفائدة الناتجة بالليرة اللبنانية لمدة سنة و q جزء من السنة مع c قيمة المبلغ i

إذا كانت n عدد صحيح يكون معنا

$$C_n = c\,(1 + r_1)^n$$

- في الحالة الثانية إذا لم تكن n عدداً صحيحاً:

نضع $n = m + p$ حيث m عدد صحيح و p كسر

نحصل على الصيغة التالية. $C_n = C_m\,(1 + r_1p) = c\,(1 + r_1)^m\,(1 + r_1p)$

- إذا كانت الوحدة الزمنية سنة كاملة نحصل على q = ١ ؛ r_1 = ١

$C_n = c\,(1 + r)^n$ أما $Cn = c\,(1 + r)^m\,(1 + r_1p)$

الفصل السادس والعشرون

اللوغاريتمات

ـ **تعريف**: إذا كان معنا متتالية هندسية متزايدة حيث إن معدلها الوسطي الحسابي ($q > 1$) وأول حد فيها العدد واحد. ومتتالية حسابية متزايدة أول حد فيها صفر ومعدلها الوسطي الحسابي r؛ $r >$ صفر. أي

÷ ١ : q : q^2 : q^3 : ... q^n

÷ 0 : r : $2r$: $3r$: ... nr

إذا قمنا بمقابلة هاتين المتتاليتين حداً بحد، يكون كل حد من المتتالية الحسابية هو لوغاريتم الحد المقابل من المتتالية الهندسية فنحصل على: لغ $q^n = nr$ أو $\log q^n = nr$

بما أن قيم r و q عشوائية لذلك يكون لدينا عدد لا متناه من الأنظمة اللوغاريتمية.

ـ اللوغاريتم العادي: إذا أعطينا $q = 10$ و $r = 1$ نحصل على المتتالية التالية:

÷ ١ : ١٠ : $١٠^{٢}$: $١٠^{٣}$: $١٠^{٤}$: ... $١٠^{ن}$

÷ ٠ : ١ : ٢ : ٣ : ٤ : ... ن

نحصل بشكل عام:

لغ ١ = ٠ لغ ١٠ = ١ لغ ١٠٠ = ٢ لغ ١٠٠٠ = ٣ لغ $١٠^{ن}$ = ن

٢ـ خصائص اللوغاريتمات

١ ـ يعادل لوغاريتم حاصل ضربي مجموع لوغاريتمات عوامله

$$\text{Log } A \cdot B = \text{Log } A + \text{Log } B$$

٢ ـ يعادل لوغاريتم حاصل قسمي الفرق بين لوغاريتمات الصورة والمخرج.

$$\text{Log } \frac{A}{B} = \text{Log } A - \text{Log } B$$

٣ ـ يعادل لوغاريتم عدد مرفوع للقوة n حاصل ضرب الأسُس في لوغاريتم العدد.

$$\text{Log } A^m = m \text{ Log } A$$

٤ ـ يعادل لوغاريتم الجذر التربيعي لعدد لوغاريتم هذا العدد مقسوماً بالعدد n

$$\text{Log } \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \text{ Log } A$$

ـ لا يتغير القسم الكسري العشري في لوغاريتم عدد عندما نضرب أو نقسم هذا العدد بقدرة أسية كاملة للعشرة.

$$\text{Log } (A \times 10^n) = \text{Log } A + \text{Log } 10^n = \text{Log } A + n$$

$$\text{Log } \frac{A}{10^n} = \text{Log } A - \text{Log } 10^n = \text{Log } A - n$$

ـ مثلاً لحساب لوغاريتم العدد ٤٣٢٥,٧٥ نقول هذا العدد يمكن تسويره بين ١٠^٤ > ٤٣٢٥,٧٥ > ١٠^٣ أي أن لـغ ٤٣٢٥,٧٥ يكون ٤ > لـغ ٤٣٢٥,٧٥ > ٣ وبذلك يكون الجزء الكامل من اللغوغاريتم المطلوب هو ٣

ولاحتساب اللوغاريتمات طرق متعددة يمكننا استخدام الجداول اللازمة لذلك مثل الجداول المثلثية. (انظر جدول اللوغاريتمات في الملحق).

ـ الكولوغاريتم لعدد ما هو لوغاريتم مقلوب هذا العدد إذا كان A عدد معين

$$\text{Colog } A = \text{Log } \frac{1}{A}$$

الفصل السابع والعشرون

وحدات القياس

أولاً: القوى العشرية

پ = بيكون = $١٠^{-١٢}$	P = Pico = 10^{-12}
ن = نانون = $١٠^{-٩}$	n = nano = 10^{-9}
مو = ميكرو = $١٠^{-٦}$	M = micro = 10^{-6}
م = ميللي = $١٠^{-٣}$	m = milli = 10^{-3}
س = سنتي = $١٠^{-٢}$	c = centi = 10^{-2}
د = دسي = $١٠^{-١}$	d = déci = 1^{-1}
دا = دكا = $١٠^{١}$	da = deca = 10^{1}
هـ = هكتو = $١٠^{٢}$	h = hecto = 10^{2}
ك = كيلو = $١٠^{٣}$	k = kilo = 10^{3}
م = ميغا = $١٠^{٦}$	M = Mega = 10^{6}
ج = جيجا = $١٠^{٩}$	G = Giga = 10^{9}
ت = تيرا = $١٠^{١٢}$	T = Tera = 10^{12}

ثانياً: مقاييس الطول

كلم	م	دسم	سم	ملم	ميكرومتر
١	$١٠^{٣}$	$١٠^{٤}$	$١٠^{٥}$	$١٠^{٦}$	$١٠^{٩}$
$١٠^{-٣}$	١	١٠	$١٠^{٢}$	$١٠^{٣}$	$١٠^{٦}$
$١٠^{-٤}$	$١٠^{-١}$	١	١٠	$١٠^{٢}$	$١٠^{٥}$
$١٠^{-٥}$	$١٠^{-٢}$	$١٠^{-١}$	١	١٠	$١٠^{٤}$
$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٣}$	$١٠^{-٢}$	$١٠^{-١}$	١	$١٠^{٣}$
$١٠^{-٩}$	$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٥}$	$١٠^{-٤}$	$١٠^{-٣}$	١

ثالثاً: طول الموجة

ملم	ميكرومتر	نانومتر	انغستروم A°	بيكومتر	ميللي A°
١	$١٠^{٣}$	$١٠^{٦}$	$١٠^{٧}$	$١٠^{٩}$	$١٠^{١٠}$
$١٠^{-٣}$	١	$١٠^{٣}$	$١٠^{٤}$	$١٠^{٦}$	$١٠^{٧}$
$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٣}$	١	١٠	$١٠^{٣}$	$١٠^{٤}$
$١٠^{-٧}$	$١٠^{-٤}$	$١٠^{-١}$	١	$١٠^{٢}$	$١٠^{٣}$
$١٠^{-٩}$	$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٣}$	$١٠^{-٢}$	١	١٠
$١٠^{-١٠}$	$١٠^{-٧}$	$١٠^{-٤}$	$١٠^{-٣}$	$١٠^{-١}$	١

رابعاً: مقاييس المساحة

كلم^{٢}	م^{٢}	دسم^{٢}	سم^{٢}	ملم^{٢}	مو م^{٢}
١	$١٠^{٦}$	$١٠^{٨}$	$١٠^{١٠}$	$١٠^{١٢}$	$١٠^{١٨}$
$١٠^{-٦}$	١	$١٠^{٢}$	$١٠^{٤}$	$١٠^{٦}$	$١٠^{١٢}$
$١٠^{-٨}$	$١٠^{-٢}$	١	$١٠^{٢}$	$١٠^{٤}$	$١٠^{١٠}$
$١٠^{-١٠}$	$١٠^{-٤}$	$١٠^{-٢}$	١	$١٥^{٢}$	$١٠^{٨}$
$١٠^{-١٢}$	$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٤}$	$١٠^{-٢}$	١	$١٠^{٦}$
$١٠^{-١٨}$	$١٠^{-١٢}$	$١٠^{-١٠}$	$١٠^{-٨}$	$١٠^{-٦}$	١

خامساً: مقاييس الحجم

م^{٣} متر مكعب	دسم^{٣} ديسمتر مكعب	سم^{٣} ستميتر مكعب	ملم^{٣} ميلليمتر مكعب
١	$١٠^{٣}$	$١٠^{٦}$	$١٠^{٩}$
$١٠^{-٣}$	١	$١٠^{٣}$	$١٠^{٦}$
$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٣}$	١	$١٠^{٣}$
$١٠^{-٩}$	$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٣}$	١

سادساً: مقاييس السعة

م^{٣} متر مكعب	ل أو دسم^{٣} ليتر	مل ميلليلتر أو سم^{٣}
١	$١٠^{٣}$	$١٠^{٦}$
$١٠^{-٣}$	١	$١٠^{٣}$
$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٣}$	١

سابعاً: مقاييس الوزن

أ -

ميغاغرام مغ	كيلوغرام كلغ	غرام غ	ملليغرام ملغ
١	$١٠^{٣}$	$١٠^{٦}$	$١٠^{٩}$
$١٠^{-٣}$	١	$١٠^{٣}$	$١٠^{٦}$
$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٣}$	١	$١٠^{٣}$
$١٠^{-٩}$	$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٣}$	١

ب -

طن	كلغ	دكغ	غ	مللغ
١	$١٠^{٣}$	$١٠^{٥}$	$١٠^{٦}$	$١٠^{٩}$
$١٠^{-٣}$	١	$١٠^{٢}$	$١٠^{٣}$	$١٠^{٦}$
$١٠^{-٥}$	$١٠^{-٢}$	١	١٠	$١٠^{٤}$
$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٣}$	$١٠^{-١}$	١	$١٠^{٣}$
$١٠^{-٩}$	$١٠^{-٦}$	$١٠^{-٤}$	$١٠^{-٣}$	١

ثامناً: مقاييس القوة:

كلغ-وزن	دين	جول/سم	نيوتن
١	$٩،٨١ \times ١٠^{٥}$	٠،٠٠٩٨١	٩،٨١
$١٠،٢ \times ١٠^{-٧}$	١	$١٠^{-٧}$	$١٠^{-١}$
١٠،٢	$١٠^{٧}$	١	$١٠^{٢}$
٠،١٠٢	$١٠^{٥}$	٠،٠١	١

تاسعًا: مقاييس الشغل

جول	كيلواط ساعة	حصان بخاري بالساعة	كلغ ـ م	كيلو سعرة
١	٠،٢٧٨ × $٠١^{-٦}$	٠ ،٢٧٨ × $١٠^{-٦}$	٠،١٠٢	٠،٢٣٩ × $١٠^{-٣}$
٣،٦٠ × $١٠^{٦}$	١	١،٣٦	٠،٣٦٧ × $١٠^{٦}$	٨٦٠
٢،٦٥ × $١٠^{٦}$	٠،٧٣٦	١	٠،٢٧٠ × $١٠^{٦}$	٦٣٢
٩،٨١	٢،٧٢ × $١٠^{-٦}$	٣،٧٠ × $١٠^{-٦}$	١	٢٣٤٥ × $١٠^{-٣}$
٤١٨٦	١،١٦ × $١٠^{-٣}$	١،٥٨ × $١٠^{-٣}$	٤٢٦،٩	١

عاشراً: مقاييس القدّرة Puissance

واط	كلواط	حصان بخاري	كلغ ـ م/ ثا	كيلوسعرة/ ساعة
١	$١٠^{-٣}$	٠،٠٠١٣٦	٠،١٠٢	٠،٨٦٠
١٠٠٠	١	١،٣٦	١٠٢	٨٦٠
٧٣٦	٠،٧٣٦	١	٧٥	٦٣٥
٩،٨١	٠،٠٠٩٨١	٠،٠٠١٣٣	١	٨،٤٥
١،١٦	١،١٦ × $١٠^{٣}$	٠،٠٠١٥٧	٠،١١٨	١

الفصل الثامن والعشرون

المقاييس والموازين والمكاييل في النظام الأنجلوسكسوني

١ - الطول

١ إنش = ٢,٤٥ سم = ٢٤,٥ ملم = ٠,٠٢٤٥ م

١ قدم = ١٢ إنشاً = ٣٠,٤٨ سم = ٠,٣٠٤٨ م

١ يارد = ٣ أقدام = ٠,٩١٤٤ متر

١ فاثوم = ٦ أقدام = ١,٨٢٨٨ متر

١ رود (أو ١ برش أو ١ بول) = $٥\frac{١}{٢}$ يارد = ٥,٠٢٩٢ م

١ فورلونغ = ٤٠ رود = ٢٠١,١٦٨٤ م

١ ميل = ١٧٦٠ يارد = ٥٢٨٠ قدم = ١,١٦٠٩٣٤ كلم

١ ميل بحري = ١,١٥٠٧٧٩ ميل = ٦٠٧٦,١١ قدم = ١٨٥٢ متر

١ فرسخ = ٣ أميال = ٤,٨٢٨ كلم

٢ - المساحة

١ إنش مربع = ٦,٤٥١٦ سم^{٢}

١ قدم مربع = ١٤٤ إنش مربع = ٠,٠٩٢٩ م^{٢}

١ يارد مربع = ٩ أقدام مربعة = ٠,٨٣٦١ م^{٢}

١ رود (قصبة) مربع = ٢٥,٢٩٣ م^{٢}

١ أكر = ٠,٤٠٤٧ هكتار

١ ميل مربع = ٦٤٠ أكر = ٢,٥٨٩٩ كلم^{٢}

في النظام المتري الخاص بالأراضي:

١ سنتيار = ١ م^{2} = ١,١٩٥ يارد مربع

١ آر = ١٠٠ م^{2} = ١١٩,٥٩ يارد مربع

١ هكتار = ١٠٠ آر = ٢,٤٧١ أكر

١ كلم^{2} = ١٠٠ هكتار = ٢٤٧,١٠٤ أكر

٣ ـ الحجم

١ إنش^{3} = ١٦,٣٨٧ سم^{3}

١ قدم^{3} = ١,٧٢٨ إنش^{3} = ٠,٠٢٨٣ م^{3}

١ يارد^{3} = ٢٧ قدم^{3} = ٠,٧٦٤ م^{3}

١ ميل^{3} = ٤,١٦٨ كلم^{3}

١ طن = ١٠٠ قدم^{3} = ٢,٨٣٢ م^{3}

٤ ـ السعة

١ إنش سائل = ٠,٠٩٦ ليتر

١ غل = ٤ أونس سائل = ٧,٢٢ إنش^{3} = ٠,١١٨ ليتر

١ باينت = ٤ غل = ٢٨,٨٧ إنش^{3} ٠,٤٧٣٢ ليتر = ٠,٨٣ باينت بريطان

١ غالون = ٢٣١ إنش^{3} = ٣,٧٨٥ ليتر = ٠,٨٣٢٧ غالون بريطاني

١ برميل = ٣١,٥ غالون = ١١٩,٢٤ ليتر

١ برميل بترول = ٤٢ غالون = ١٥٨,٩٧ ليتر

٥ ـ مكاييل أميركية جافة

١ باينت = $\frac{١}{٢}$ كوارت = ٠,٥٥٠٦ لتير

١ كوارت = ٢ باينت = ٦٧,٢٠٠ إنش^{3} = ١,١٠١٢ ليتر

١ بك = ٨ كوارت = ٥٣٧,٦٠ إنش^{3} = ٨,٨٠٩٨ ليتر

١ بوشل = ٤ بك = ٢١٥٠,٤ إنش^{3} = ٣٥,٢٣٨ ليتر

١ برميل = ٧٠٥٦ إنش^{3} = ١١٥,٦٢ ليتر

٦ ـ الوزن

١ قمحة = ٠,٠٦٤٨ غرام
١ درهم = ٢٧,٣٤ قمحة = ١,٧٧ غرام
١ آونس = ١٦ درهم = ٢٨,٢٤٩٥ غرام
١ باوند = ١٦ آونس = ٠,٤٥٣٦ كيلو غرام = ٠,٠٧ ستون
١ هندردويت = ١٠٠ باوند = ٤٥,٣٦ كليو غرام = ٠,٨٩ هندروديت بريطاني
١ طن أميركي = ٢٠٠٠ باوند = ٩٠٧,١٨ كلغ = ٠,٩٠٧ طن متري = ٠,٨٩٢٩ طن بريطاني

٧ ـ مكاييل بريطانية سائلة

١ أونس سائل = ١,٧٣٣ إنش^{٣} = ٠,٠٢٨٤ ليتر
١ غل = ٥ أونس سائل = ٨,٦٧ إنش^{٣} = ٠,١٤٢١ ليتر
١ باينت = ٤ غل = ٣٤,٦٧ إنش^{٣} = ٠,٥٦٨ لتير = ١,٢٠ باينت أميركي
١ كوارت = ٢ باينت = ٦٩,٣٥ إنش^{٣} = ١,١٣٦٥ ليتر
١ غالون = ٤ كوارت = ٢٧٧,٤١ إنش^{٣} = ٤,٥٤ ليتر = ١,٢٠ غالون أميركي

مكاييل بريطانية جافة

١ بك = ٢ غالون = ٥٥٤,٨٣ إنش^{٣} = ٩,٠٩٢ ليتر
١ بوشل = ٤ بك = ٢٢١٩,٣٥ إنش^{٣} ٣٦,٣٦٨ ليتر

مكاييل بريطانية للوزن

١ ستون = ٦,٣٥ كلغ = ١٤ باوند
١ هندردويت = ١١٢ بوند = ٥٠,٨٠ كلغ = ١,١٢ هندردويت أميركي
١ طن بريطاني = ٢,٢٤ باوند = ١٠١٦,٠٤ كلغ = ١,٠١٦ طن متري = ١,١٢ طن أميركي

جدول التحويل

للتحويل من	الـــى	اضرب (×) ب
انش	مليمتر	٢٥،٤
انش	سنتيمتر	٢،٥٤
قدم	متر	٠،٣٠٤٨
يارد	متر	٠،٩١٤٤
ميل	كيلومتر	١،٦٠٩٣
ميل	قدم	٥٢٨٠
ميل	ميل بحري	٠،٨٦٨٤
ميل بحري	كيلومتر	١،٨٥٢
ميل بحري	ميل	١،١٥١٦
	* * *	
انش مربع	سنتيمتر مربع	٦,٤٥١٦
قدم مربعة	متر مربع	٠،٠٩٢٩
يارد مربع	متر مربع	٠،٨٣٦١
أكر	هكتار	٠،٤٠٤٦
أكر	قدم مربع	٤٣،٥٦٠
أكر	ميل مربع	٠،٠٠١٥٦٢
ميل مربع	كيلومتر مربع	٢،٥٨٩٩
	* * *	
انش مكعب	سنتميتر مكعب	١٦،٣٨٧١
قدم مكعب	متر مكعب	٠،٠٢٨٣
يارد مكعب	متر مكعب	٠،٧٦٤٦

اونس سائل بريطاني	ليتر	٠،٠٢٨٤
اونس سائل اميركي	ليتر	٠،٠٢٩٦
باينت بريطاني	ليتر	٠،٥٦٨٢
باينت اميركي	ليتر	٠،٤٧٣٢
غالون بريطاني	ليتر	٤،٥٤٦
غالون اميركي	ليتر	٣،٧٨٥٤
	* * *	
اونس	غرام	٢٨,٣٤٩٥
اونس	باوند	٠،٠٦٢٥
باوند	كيلوغرام	٠،٤٥٣٦
باوند	اونس	١٦
طن بريطاني	طن متري	١،٠١٦
طن بريطاني	باوند	٢٢٤٠
طن اميركي	طن متري	٠،٩٠٧٢
طن اميركي	باوند	٢٠٠٠
	* * *	
ميلمتر	انش	٠،٠٣٩٤
سنتميتر	انش	٠،٣٩٣٤
سنتميتر	قدم	٠،٠٣٢٨١
متر	قدم	٣،٢٨٠٨
متر	يارد	١،٠٩٣٦
كيلومتر	ميل	٠،٦٢١٤
كيلةمتر	ميل بحري	٠،٥٤
	* * *	
سنتميتر مربع	انش مربع	٠،١٥٥
متر مربع	قدم مربع	١٠،٧٦٤

متر مربع	يارد مربع	١،١٩٦
هكتار	أكر	٢،٤٧١
كيلومتر مربع	ميل مربع	٠،٣٨٦
سنتميتر مكعب	انش مكعب	٠،٠٦١
متر مكعب	قدم مكعب	٣٥،٣١٥
متر مكعب	يارد مكعب	١،٣٠٨
	* * *	
ليتر	اونس سائل بريطاني	٣٥،١٩٦١
ليتر	اونس سائل اميركي	٣٣،٨١٥
ليتر	باينت بريطاني	١،٧٥٩٨
ليتر	باينت اميركي	٢،١١٣٤
ليتر	غالون بريطاني	٠،٢١٩٩
ليتر	غالون اميركي	٠،٢٦٤٢
غرام	اونس	٠،٠٣٥٣
كيلوغرام	باوند	٢،٢٠٤٦
طن متري	طن بريطاني	٠،٩٨٤٢

الفصل التاسع والعشرون

جدول القيم المثلثية من ١ حتى ٩٠

الزوايا	جيب	ظل	ظل التمام	جيب التمام	
٠°	٠،٠٠٠٠	٠،٠٠٠٠	∞	١،٠٠٠٠	٩٠°
١	٠،٠١٧٥	٠،٠١٧٥	٥٧،٢٩٠	٠،٩٩٩٨	٨٩
٢	٠،٠٣٤٩	٠،٠٣٤٩	٢٨،٦٣٦	٠،٩٩٩٤	٨٨
٣	٠،٠٥٢٣	٠،٠٥٢٤	١٩،٠٨١	٠،٩٩٨٦	٨٧
٤	٠،٠٦٩٨	٠،٠٦٩٩	١٤،٣٠١	٠،٩٩٧٦	٨٦
٥	٠،٠٨٧٢	٠،٠٨٧٥	١١،٤٣٠	٠،٩٩٦٢	٨٥
٦	٠،١٠٤٥	٠،١٠٥١	٩،٥١٤٤	٠،٩٩٤٥	٨٤
٧	٠،١٢١٩	٠،١٢٢٨	٨،١٤٤	٠،٩٩٢٥	٨٣
٨	٠،١٣٩٢	٠،١٤٠٦	٧،١١٥	٠،٩٩٠٣	٨٢
٩	٠،١٥٦٤	٠،١٥٨٤	٦،٣١٣	٠،٩٨٧٧	٨١
١٠	٠،١٧٣٦	٠،١٧٦٣	٥،٦٧١٣	٠،٩٨٤٨	٨٠
١١	٠،١٩٠٨	٠،١٩٤٤	٥،١٤٤٦	٠،٩٨١٦	٧٩
١٢	٠،٢٠٧٩	٠،٢١٢٦	٤،٧٠٤٦	٠،٩٧٨١	٧٨
١٣	٠،٢٢٥٠	٠،٢٣٠٩	٤،٣٣١٥	٠،٩٧٤٤	٧٧
١٤	٠،٢٤١٩	٠،٢٤٩٣	٤،٠١٠٨	٠،٩٧٠٣	٧٦
١٥	٠،٢٥٨٨	٠،٢٦٧٩	٣،٧٢٣١	٠،٩٦٥٩	٧٥
١٦	٠،٢٧٥٦	٠،٢٨٦٧	٣،٤٨٧٤	٠،٩٦١٢	٧٤
١٧	٠،٢٩٢٤	٠،٣٠٥٧	٣،٢٧٠٩	٠،٩٥٦٣	٧٣
١٨	٠،٣٠٩٠	٠،٣٢٤٩	٣،٠٧٧٧	٠،٩٥١٠	٧٢
١٩	٠،٣٢٥٦	٠،٣٤٤٣	٢،٩٠٤٢	٠،٩٤٥٥	٧١
٢٠	٠،٣٤٢٠	٠،٣٦٤٠	٢،٧٤٧٥	٠،٩٣٩٧	٧٠
٢١	٠،٣٥٨٤	٠،٣٨٣٩	٢،٦٠٥١	٠،٩٣٣٦	٦٩
٢٢	٠،٣٧٤٦	٠،٤٠٤٠	٢،٤٧٥١	٠،٩٢٧٢	٦٨
٢٣	٠،٣٩٠٧	٠،٤٢٤٥	٢،٣٥٥٩	٠،٩٢٠٥	٦٧
٢٤	٠،٤٠٦٧	٠،٤٤٥٢	٢،٢٤٦٠	٠،٩١٣٥	٦٦
٢٥	٠،٤٢٢٦	٠،٤٦٦٣	٢،١٤٤٥	٠،٩٠٦٣	٦٥
٢٦	٠،٤٣٨٤	٠،٣٨٧٨	٠،٠٥٠٣	٠،٨٩٨٨	٦٤
٢٧	٠،٤٥٤٠	٠،٥٠٩٥	٠،٩٦٢٦	٠،٨٩١٠	٦٣

الزوايا	جيب التمام	ظل التمام	الظل	جيب	الزوايا
٢٨	٠،٤٦٩٥	٠،٥٣١٨	١،٨٨٠٧	٠،٨٨٢٩	٦٢
٢٩	٠،٤٨٤٨	٠،٥٥٤٤	٠،٨٠٤٠	٠،٨٧٤٦	٦١
٣٠	٠،٥٠٠٠	٠،٥٧٧٤	١،٧٣٢١	٠،٨٦٦٠	٦٠
٣١	٠،٥١٥٠	٠،٦٠٠٩	١،٦٦٤٣	٠،٨٥٧٢	٥٩
٣٢	٠،٥٢٩٩	٠،٦٢٤٩	١،٦٠٠٣	٠،٨٤٨٠	٥٨
٣٣	٠،٥٤٤٦	٠،٦٤٩٤	١،٥٣٩٩	٠،٨٣٨٧	٥٧
٣٤	٠،٥٥٩٢	٠،٦٧٤٥	١،٤٨٢٦	٠،٨٢٩٠	٥٦
٣٥	٠،٥٧٣٦	٠،٧٠٠٢	١،٤٢٨١	٠،٨١٩٢	٥٥
٣٦	٠،٥٨٧٨	٠،٧٢٦٥	١،٣٧٦٤	٠،٨٠٩٠	٥٤
٣٧	٠،٦٠١٨	٠،٧٥٣٦	١،٣٢٧٠	٠،٧٩٨٦	٥٣
٣٨	٠،٦١٥٧	٠،٧٨١٣	١،٢٧٩٩	٠،٧٨٨٠	٥٢
٣٩	٠،٦٢٩٣	٠،٨٠٩٨	١،٢٣٤٩	٠،٧٧٧١	٥١
٤٠	٠،٦٤٢٨	٠،٨٣٩١	١،١٩١٨	٠،٧٦٦٠	٥٠
٤١	٠،٦٥٦١	٠،٨٦٩٣	١،١٥٠٤	٠،٧٥٤٧	٤٩
٤٢	٠،٦٦٩١	٠،٩٠٠٤	١،١١٠٦	٠،٧٤٣١	٤٨
٤٣	٠،٦٨٢٠	٠،٩٣٢٥	١،٠٧٢٤	٠،٧٣١٤	٤٧
٤٤	٠،٦٩٤٧	٠،٩٦٥٧	١،٠٣٥٥	٠،٧١٩٣	٤٦
٤٥	٠،٧٠٧١	١،٠٠٠٠	١،٠٠٠٠	٠،٧٠٧١	٤٥

جدول لوغارتمات الأعداد الصحيحة المائة الأولى

ن	لغ	ن	لغ	ن	لغ	ن	لغ	ن	لغ
١	٠،٠٠٠٠٠٠	٢١	١،٣٢٢٢٢	٤١	١،٦١٢٧٨	٦١	١,٧٨٥٣٣	٨١	١،٩٠٨٤٩
٢	٠،٣٠١٠٣	٢٢	١،٣٤٢٤٢	٤٢	١،٦٢٣٢٥	٦٢	١،٧٩٢٣٩	٨٢	١،٩١٣٨١
٣	٠،٤٧٧١٢	٢٣	١،٣٦١٧٣	٤٣	١،٦٣٣٤٧	٦٣	١،٧٩٩٣٤	٨٣	١،٩١٩٠٨
٤	٠،٦٠٢٠٦	٢٤	١،٣٨٠٢١	٤٤	١،٦٤٣٤٥	٦٤	١،٨٠٦١٨	٨٤	١،٩٢٤٢٨
٥	٠،٦٩٨٩٧	٢٥	١،٣٩٧٩٤	٤٥	١،٦٥٣٢١	٦٥	١،٨١٢٩١	٨٥	١،٩٢٩٤٢
٦	٠،٧٧٨١٥	٢٦	١،٤١٤٩٧	٤٦	١،٦٦٢٧٦	٦٦	١،٨١٩٥٤	٨٦	١،٩٣٤٥٠
٧	٠،٨٤٥١٠	٢٧	١،٤٣١٣٦	٤٧	١،٦٧٢١٠	٦٧	١،٨٢٦٠٧	٨٧	١،٩٣٩٥٢
٨	٠,٩٠٣٠٩	٢٨	١،٤٤٧١٦	٤٨	١،٦٨١٢٤	٦٨	١،٨٣٢٥١	٨٨	١،٩٤٤٤٨
٩	٠،٩٥٤٢٤	٢٩	١،٤٦٢٤٠	٤٩	١،٦٩٠٢٠	٦٩	١،٨٣٨٨٥	٨٩	١،٩٤٩٣٩
١٠	١،٠٠٠٠٠	٣٠	١،٤٧٧١٢	٥٠	١،٦٩٨٩٧	٧٠	١،٨٤٥١٠	٩٠	١،٩٥٤٢٤
١١	١،٠٤١٣٩	٣١	١،٤٩١٣٦	٥١	١،٧٠٧٥٧	٧١	١،٨٥١٢٦	٩١	١،٩٥٩٠٤
١٢	١،٠٧٩١٨	٣٢	١،٥٠٥١٥	٥٢	١،٧١٦٠٠	٧٢	١،٨٥٧٣٣	٩٢	١،٩٦٣٧٩
١٣	١،١١٣٩٤	٣٣	١،٥١٨٥١	٥٣	١،٧٢٤٢٨	٧٣	١،٨٦٣٣٢	٩٣	١،٩٦٨٤٨
١٤	١،١٤٦١٣	٣٤	١،٥٣١٤٨	٥٤	١،٧٣٢٣٩	٧٤	١،٨٦٩٢٣	٩٤	١،٩٧٣١٣
١٥	١،١٧٦٠٩	٣٥	١،٥٤٤٠٧	٥٥	١،٧٤٠٣٦	٧٥	١،٨٧٥٠٦	٩٥	١،٩٧٧٧٢
١٦	١،٢٠٤١٢	٣٦	١،٥٥٦٣٠	٥٦	١،٧٤٨١٩	٦٧	١،٨٨٠٨١	٩٦	١،٩٨٢٢٧
١٧	١،٢٣٠٤٥	٣٧	١،٥٦٨٢٠	٥٧	١،٧٥٥٨٧	٧٧	١،٨٨٦٤٩	٩٧	١،٩٨٦٧٧
١٨	١،٢٥٥٢٧	٣٨	١،٥٧٩٧٨	٥٨	١،٧٦٣٤٣	٧٨	١،٨٩٢٠٩	٩٨	١،٩٩١٢٣
١٩	١،٢٧٨٧٥	٣٩	١،٥٩١٠٦	٥٩	١،٧٧٠٨٥	٧٩	١،٨٩٧٦٣	٩٩	١،٩٩٥٦٤
٢٠	١،٣٠١٠٣	٤٠	١،٦٠٢٠٦	٦٠	١،٧٧٨١٥	٨٠	١،٩٠٣٠٩	١٠٠	٢،٠٠٠٠٠

فهرس الموضوعات



جرّوس پرس